

Les extensions intrinsèques les plus simples des ensembles \mathbb{R} et \mathbb{N} pour une nouvelle Analyse Non Standard

Thierry Bautier

I.U.F.M. de Bretagne, E.S.P.E., site de Vannes (Ecole interne de l'U.B.O.)

32 Avenue Roosevelt, 56000 Vannes, France

Résumé

Le principal résultat de cette recherche est d'avoir prolongé de la manière la plus simple les ensembles standard \mathbb{N} et \mathbb{R} .

Les différentes extensions de \mathbb{R} sont le plus petit sur-anneau intègre \mathbb{R}_o , le plus petit sur-ensemble totalement ordonné et continu $\overline{\mathbb{R}_o}$ et le plus petit sur-corps complet Ω de \mathbb{R} .

L'extension de \mathbb{N} est formée d'entiers finis ou infiniment grands mais tous définis à l'unité près, c'est un modèle non standard de l'Arithmétique de Peano.

Toutes ces extensions de \mathbb{R} et \mathbb{N} sont intrinsèques, ou nécessaires. Elles "ne peuvent pas être autres" à la différence d'autres structures numériques comme les algèbres de Weil $\mathbb{R}[X]/(X^I)$ qui sont contingentes car elles introduisent le choix arbitraire d'un paramètre I .

On développe ici pour la première fois une nouvelle Analyse Non Standard en prolongeant à \mathbb{R}_o les fonctions C^∞ standard puis on étend leurs propriétés différentielles et intégrales aux fonctions régulières de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o qui sont des séries entières convergentes dans un intervalle d'amplitude standard mais non nulle.

Tous ces résultats ont un point de départ historique qui est à chaque fois précisé.

*thierry.bautier@bretagne.iufm.fr

Abstract

Infinitely small numbers and infinitely large integers defined to a unit for a new Non Standard Calculus

The main results of this paper are the constructions, both rigorous and intuitive, of the \aleph intrinsic extension of the set of non negative integers \mathbb{N} and the Ω (resp. $\mathbb{R}_o, \overline{\mathbb{R}_o}$) smallest strict over-field (resp. ring, set) of \mathbb{R} set which is totally ordered and complete (resp. entire, continue).

The first differential and integral elements of a new Non Standard Analysis are given. A new and rigorous proof of the Fundamental Theorem of Analysis is given according to G.W.Leibniz historical intuition's.

Plan

Introduction (p. 4)

1. De nouveaux nombres "réels". Premières propriétés de l'ensemble \mathbb{R}_o

- 1.1. Propriétés algébriques et ordinales de $\mathbb{R}_o = \mathbb{R}[[X]]$ (7)
- 1.2. Prolongement analytique d'une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (8)
- 1.3. "Continuité", NS*-continuité et "différentiabilité" multiple d'une fonction de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o (9)
- 1.4. "Différentiabilité" multiple du prolongement analytique d'une fonction C^∞ standard (9)
- 1.5. Deux types de différentielles pour les prolongements analytiques des fonctions analytiques standard et leurs relations réciproques (11)
- 1.6. Sur le contexte historique de cette recherche (13)
- 1.7. Le coût d'une révolution non standard (15).

2. De nouveaux nombres "entiers" définis à l'unité près. Propriétés des ensembles $\mathbb{N}[\Sigma]$ et \aleph

- 2.1. Conditions générales pour construire un ensemble de nombres entiers (18)
- 2.2. Construction formelle de $\mathbb{N}[\Sigma]$ et \mathbb{R}_o^{1+} (18)
- 2.3. Deux modèles non standard de l'Arithmétique de Peano (20)
- 2.4. Le point de vue de I.Newton sur les nombres entiers infiniment grands (21).

3. Une démonstration du Théorème Fondamental de l'Analyse Non Standard

- 3.1. Résolution de l'équation du premier ordre pour le prolongement analytique d'une fonction analytique standard (23)
- 3.2. Généralisation aux fonctions régulières ou newtoniennes de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_0 (27)
- 3.3. Résolution d'une équation différentielle d'ordre quelconque pour des fonctions régulières (30).

4. Le paradis newtonien et la réhabilitation posthume de G.W.Leibniz

- 4.1. Introduction à cette étude d'Histonique (32)
- 4.2. Deux caractéristiques préalable de l'édifice newtonien (32)
- 4.3. Une modernisation du calcul des fluxions de Newton (32)
- 4.4. Une comparaison des oeuvres de Newton et Leibniz (34)
- 4.5. La Théorie de l'Intégration de I.Newton (35)
- 4.6. Aux limites de l'édifice newtonien (36)
- 4.7. Les faiblesses de l'édifice leibnizien (37)
- 4.8. La Théorie de l'Intégration de G.W.Leibniz (37)
- 4.9. Conclusion de cette étude d'Histonique (38).

5. Principaux résultats sur les ensembles de nombres

- 5.1. Les extensions intrinsèques les plus simples de \mathbb{N} et \mathbb{R} (40)
- 5.2. Premières propriétés du corps totalement ordonné $(\Omega, +, \times, \leq)$ (41)
- 5.3. Propriétés de l'algèbre totalement ordonnée $(\Omega, +, \cdot, \times, \leq)$ (42)
- 5.4. Propriétés ordinales de Ω et de $\overline{\Omega}$ (43)
- 5.5. Une nouvelle caractérisation des structures $(\Omega, +, \times, \leq)$ et $(\overline{\Omega}, \leq)$ (47).

Conclusion (p. 50).

Références.

Introduction

Les Analyses Non Standard de A.Robinson [1,2,3] et de J.H.Conway [4] sont aujourd'hui assez bien connues et la nouvelle Analyse Non Standard qui est ici présentée vise les mêmes objectifs que ces deux théories mathématiques :

Compléter la droite numérique standard par des éléments infiniment grands et infiniment petits, en conservant l'essentiel de ses propriétés.

Le niveau technique de cette troisième théorie mathématique est *très* simple, beaucoup plus simple que celui des deux autres théories et l'on doit s'en expliquer dans cette introduction.

La Théorie des nombres *hyperréels* de A.Robinson est réputée difficile [2,3], sans doute parce qu'il s'agit de prouver par des arguments purement logiques l'existence d'un sur-espace de \mathbb{R} qui soit un corps archimédien, totalement ordonné depuis l'infiniment petit jusqu'à l'infiniment grand.

En particulier, on ne connaît aucun de ces "hypernaturels" ω , on sait seulement qu'ils "existent" et d'une certaine manière, tout se passe comme lorsque l'on travaille avec des lettres, on n'en connaît pas la valeur.

Ici, l'indétermination est très limitée puisqu'un seul *nouveau* nombre va permettre d'exprimer tous les autres.

A l'opposé de cette approche *formaliste* de A.Robinson en Analyse Non Standard, on construit ici un sur-anneau de \mathbb{R} qui n'est pas archimédien, un nouvel ensemble de nombres entiers infiniment grands mais pas infinis au sens de G.Cantor et un sur-espace noté Ω de ces deux structures qui possède toutes les propriétés voulues.

On ne saura ici dénombrer que des ensembles de nombres très particuliers et le plus grand espace numérique ici considéré, $\overline{\Omega}$, n'est que le plus petit ensemble totalement ordonné et continu qui contienne l'ensemble \mathbb{R} , différent bien sûr de l'ensemble \mathbb{R} lui-même.

A titre de comparaison, l'ensemble des *surréels* construit par Conway à base de coupures de Dedekind itérées à l'infini, conduit au plus gros sur-corps de \mathbb{R} totalement ordonné. Il contient à titre particulier, tous les ordinaux transfinis (l'addition y est commutative) ainsi que tous ses inverses.

On comprend alors la différence de technicité entre ces trois tentatives modernes de légitimer le rêve Leibnizien.

Toutes les branches des Mathématiques, y compris la Mécanique classique et la Relativité Générale, lorsqu'elles recourent aux structures de nombres réels ou entiers standard, en particulier pour intégrer une équation différentielle, pourraient trouver bénéfice à ces élargissements très simples des ensembles \mathbb{R} et \mathbb{N} qui sont ici pour la première fois proposés.

On trouvera bientôt dans ArXiv D.S. [5] une première application importante de cette nouvelle Analyse Non Standard en Théorie de la Gravitation (mais $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}[X]/(X^3)$ remplace $\mathbb{R}[[X]]$ pour que les calculs soient plus simples).

Le contenu de cet article est le suivant :

Dans la première partie, on étudie les propriétés de l'extension de \mathbb{R} , notée \mathbb{R}_o . On prolonge analytiquement les fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et l'on montre l'utilité de ce prolongement pour le calcul des différentielles. On définit également une Topologie pour l'étude des propriétés différentielles des fonctions de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o . Dans la deuxième partie, on construit le prolongement intrinsèque de l'ensemble des nombres entiers standard, noté $\mathbb{N}[\Sigma]$, puis l'extension inductive \mathbb{N} de $\mathbb{N}[\Sigma]$. La troisième partie est consacrée au Théorème Fondamental et la quatrième partie à l'étude mathématique des oeuvres de I.Newton et G.W.Leibniz.

Dans une cinquième et dernière partie, on définit un corps archimédien noté Ω qui est l'extension naturelle de l'ensemble \mathbb{R} contenant à titre de sous-espaces \mathbb{R}_o et \mathbb{N} munis de leurs propriétés algébriques et ordinales.

1 De nouveaux nombres "réels".

Premières propriétés de l'ensemble \mathbb{R}_o

- 1.1. Propriétés algébriques et ordinales de $\mathbb{R}_o = \mathbb{R}[[X]]$.
- 1.2. Prolongement analytique d'une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- 1.3. "Continuité", NS*-continuité et "différentiabilité" multiple d'une fonction de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o .
- 1.4. "Différentiabilité" multiple du prolongement analytique d'une fonction C^∞ standard.
- 1.5. Deux types de différentielles pour les prolongements analytiques des fonctions analytiques standard et leurs relations réciproques.
- 1.6. Sur le contexte historique de cette recherche.
- 1.7. Le coût d'une révolution non standard.

1.1 Propriétés algébriques et ordinales de $\mathbb{R}_o = \mathbb{R}[[X]]$

L'ensemble des séries formelles à une indéterminée

$$\mathbb{R}[[X]] = \{x = \sum_{k \geq 0} a_k X^k / a_k \in \mathbb{R}\}$$

muni des lois usuelles est bien sûr un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur \mathbb{R} et un anneau commutatif unitaire.

Proposition 1.1 $(\mathbb{R}[[X]], +, \times)$ est un anneau intègre.

Preuve : soit $x = \sum_{k \geq \text{ord}(x)} a_k X^k$, $\text{ord}(x)$ est le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, $\text{ord}(0) = +\infty$. On montre que $\text{ord}(x \times y) = \text{ord}(x) + \text{ord}(y)$. Si $x \times y = 0$ et $x \neq 0$, $y \neq 0$, contradiction. \square

Remarque 1.2 Les coefficients a_k peuvent être en nombre infini non nuls mais les puissances k de X dans X^k sont toutes finies.

Définition 1.3 On définit un ordre total sur $\mathbb{R}[[X]]$. C'est l'ordre lexicographique :

$$x = y \text{ ssi } \forall n \in \mathbb{N} \ a_n = b_n$$

Sinon, soit $p = \text{ord}(y - x)$, i.e. $(\forall n < p) \ a_n = b_n$ et $a_p \neq b_p$.

Alors $x < y$ ssi $a_p < b_p$. On a $x \leq y$ ssi $(x = y)$ ou $(x < y)$.

Proposition 1.4 $(\mathbb{R}[[X]], +, \cdot, \times, \leq)$ est une algèbre totalement ordonnée.

Preuve : on démontre seulement que \leq est compatible avec la multiplication interne (ce n'est pas le cas dans \mathbb{C} puisque, si i était positif, on aurait $i^2 = -1$ positif). Si $x = \sum_{k \geq p} a_k X^k > 0$ et $y = \sum_{l \geq q} b_l X^l > 0$, avec $p = \text{ord}(x)$ et $q = \text{ord}(y)$, on a $a_p > 0$ et $b_q > 0$ donc $a_p b_q > 0$ et $x \times y > 0$. \square

Remarque 1.5 1) On note la structure totalement ordonnée de $\mathbb{R}[[X]]$ par \mathbb{R}_o , en souvenir de I. Newton ([6] et [7, p.261]) et l'on considère les éléments de la structure d'algèbre totalement ordonnée $(\mathbb{R}_o, +, \cdot, \times, \leq)$ comme aussi "réels" que les éléments de la structure standard $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$.

2) On ne peut recourir à la notation $\mathbb{R}[o]$ ou $\mathbb{R}(o)$ car elles sont utilisées classiquement [8, p.182] pour désigner le plus petit sur-anneau et sur-corps de \mathbb{R} qui contienne l'élément transcendant nouveau o , c'est l'ensemble des polynômes de degré fini et l'ensemble des fonctions rationnelles du nombre o .

\mathbb{R}_o n'est pas un corps. Il n'est pas non plus archimédien car, selon l'ordre lexicographique précédent :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ ko < 1, \text{ noté } 0 < o \ll 1$$

On dit que o est infiniment petit, ou infinitésimal. On note aussi

$$x \ll y \text{ ssi } (\forall k \in \mathbb{N}) \ k|x| < |y|$$

$x_S = t = a_0$ est la partie standard du nombre réel x .

$u = x - x_S$ est sa partie infinitésimale.

$]x[= \{y \in \mathbb{R}_o / y_S = x_S\}$ est la coupure infinitésimale de \mathbb{R}_o en x et $]0[$ la demi-coupure à droite en 0, c'est l'ensemble des nombres infinitésimaux positifs de \mathbb{R}_o .

Tout élément de \mathbb{R}_o s'écrit donc de manière unique $x = t + u$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $|u| \ll 1$, $u \in]0[$ et $a_k \cdot o^k$ est le moment d'ordre k de $u = \sum_{k \geq 1} a_k \cdot o^k$. $T_N(x) = \sum_{0 \leq k \leq N} a_k \cdot o^k$ est la troncature à l'ordre N du nombre réel non standard x .

1.2 Prolongement analytique d'une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

\mathbb{R}_o étant muni de sa Topologie d'ordre, la plupart des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_o ne sont pas continues en t , a fortiori dérivables (on montre facilement qu'une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_o a des troncatures constantes à n'importe quel ordre sur des ouverts standard de t_0 de plus en plus petits). C'est pourquoi on prolonge de manière analytique seulement les fonctions C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dans un premier temps.

En 1.3 et 3.2, on étudie les propriétés de classes de fonctions de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o (NS*-continues, p fois "différentiables" et régulières ou newtoniennes). La sous-section 1.5 est écrite pour les prolongements analytiques des fonctions analytiques standard mais elle se généralise sans changement aux fonctions régulières qui sont définies en 3.2 puisque ces fonctions ont presque les mêmes propriétés que les prolongements analytiques.

R.Godement [7, p.264-7] étudie rapidement le prolongement analytique d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^I , dans l'anneau non intègre $\mathbb{R}[X]/(X^I)$, $I = 2$ ou 3 . Cf. aussi [5].

Ici, tout se passe de la même manière sauf que la Série de Taylor peut avoir un nombre infini dénombrable de termes non nuls.

Soit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ . Même si sa Série de Taylor a un rayon de convergence $R = 0$ en t , celle-ci converge à l'intérieur de la coupure infinitésimale de t . En effet, le nombre $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot u^k$ est un élément bien défini de \mathbb{R}_o .

Définition 1.6 *Le prolongement analytique d'une fonction f de classe C^∞ , est la fonction notée \bar{f} de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o , telle que*

$$\bar{f}(t + u) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot u^k.$$

Remarque 1.7 On peut calculer dans \mathbb{R}_o tous les coefficients des puissances finies de o , avec $u = \sum_{j \geq 1} a_j \cdot o^j$. On considère :

$$\bar{f}_N(t+u) = \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \left[\sum_{1 \leq j \leq N} a_j \cdot o^j \right]^k \cdot o^i$$

qui a la même partie standard et les N premiers moments infinitésimaux que $\bar{f}(t+u)$.

Proposition 1.8 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha > 0$, $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ si $\alpha < 0$. On prolonge analytiquement f dans \mathbb{R}_o^+ si $\alpha > 0$, dans $\mathbb{R}_o^+ \setminus [0]$ si $\alpha < 0$ et $\bar{f}(x) = t^\alpha \sum_{k \geq 0} C_\alpha^k \cdot (\frac{u}{t})^k$ avec $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ même si α n'est pas un entier.

Corollaire 1.9 Tout nombre non infinitésimal est inversible et $\frac{1}{t+u} = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} (-1)^k (\frac{u}{t})^k$.

1.3 "Continuité", NS*-continuité et "différentiabilité" multiple d'une fonction de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o

On ne peut définir pour une fonction à valeurs réelles non standard, une notion classique de dérivée car u n'est pas inversible. \mathbb{R}_o n'est pas un Espace de Banach et l'on ne peut profiter de la généralisation introduite par J.Dieudonné [9] dans le Calcul Infinitésimal.

On pourrait définir une simple opération de dérivation dans l'ensemble des fonctions \bar{f} par l'égalité $\bar{f}' = \bar{f}'$. On préfère définir en 1.4 une notion générale de différentiabilité qui soit compatible avec la Topologie d'ordre de \mathbb{R}_o . D'abord, on définit une notion spécifique à l'Analyse Non Standard [3], la NS*-continuité.

Lemme 1.10 Une fonction F de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o est NS*-continue si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

1) Pour tous les x_1, x_2 de \mathbb{R}_o , $|x_2 - x_1| \ll |F(x_2) - F(x_1)|$ n'est jamais vérifié.

2) $(\forall k \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}_o) F(\cdot)x[k] \subseteq]F(x)[_k \cdot]y[_k$ est l'ensemble des nombres proches de y à un nombre infinitésimal près, d'ordre au moins k (c'est la coupure en y d'ordre k).

Définition 1.11 F est "continue" en x_0 ssi :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*})(\forall x \in \mathbb{R}_o) |x - x_0| < \eta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.12 L'astérisque signifie que la NS*-continuité n'est pas celle de l'Analyse Non Standard de Robinson. Les guillemets signalent qu'il ne s'agit pas des notions de l'Analyse standard.

Proposition 1.13 Si F est NS*-continue, alors F est "continue" partout.

Preuve : soit $\varepsilon = o^n$. On prend $\eta = o^{n+1}$, alors $\text{ord}(F(x) - F(x_0)) \geq \text{ord}(x - x_0) \geq n + 1$ donc $|F(x) - F(x_0)| < o^n$.

Remarque 1.14 La réciproque est fausse. Par exemple F de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o telle que $x = t + a_1 \cdot o + a_2 \cdot o^2 + \dots \mapsto F(x) = a_1 + a_2 \cdot o + \dots$ est partout "continue" (prendre $\eta = \varepsilon \times o$) mais pas NS^* -continue.

Définition 1.15 Une fonction F de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o est p fois "différentiable" en $x_0 \in \mathbb{R}_o$ s'il existe $p+1$ nombres $H_i \in \mathbb{R}_o$, $i = 0, \dots, p$ tels que :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*})(\forall x \in \mathbb{R}_o)|x - x_0| < \eta \Rightarrow |F(x) - H_0 - H_1 \times (x - x_0) - \dots - H_p \times (x - x_0)^p| < \varepsilon |x - x_0|^p.$$

Proposition 1.16 1) Si F est $p+1$ fois "différentiable" en x_0 alors F est p fois "différentiable".

2) Si F est "différentiable" en x_0 alors F est NS^* -continue en x_0 (fixer $x_2 = x_0$ dans la définition 1 ou $x = x_0$ dans la définition 2).

3) S'ils existent, ces nombres H_i sont uniques et dépendent en général de x_0 .

1.4 "Différentiabilité" du prolongement analytique d'une fonction C^∞ standard

Remarque 1.17 Cette notion non standard* de "différentiabilité" est locale, infinitésimale même. Puisqu'une fonction \bar{f} est définie par une série formelle, on démontre qu'elle est "différentiable" partout.

Proposition 1.18 Tout prolongement analytique d'une fonction numérique infiniment dérivable, est "différentiable" en $t \in \mathbb{R}$.

Preuve : on prend ε et η infinitésimaux et on cherche H tel que $|\bar{f}(t+u) - \bar{f}(t) - H \times u| < \varepsilon \times |u|$ pour $|u| < \eta$.

On prend bien sûr $H = f'(t)$ et $|\sum_{k \geq 2} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot u^k| < b_2 \cdot u^2$ pour tout réel standard b_2 strictement positif tel que $|\frac{1}{2}f''(t)| < b_2$, du fait de l'ordre lexicographique.

On a alors $(\forall \varepsilon \in [0])(\exists \eta \in [0])(\forall u \in]0[)|u| < \eta \Rightarrow b_2 \cdot u^2 < \varepsilon |u|$.

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{b_2}$ \square

Définition 1.19 On dit alors que \bar{f} est "dérivable" en t . De manière générale, on note $H = F'(t)$ et, de manière particulière aux prolongements analytiques, on a $\bar{f}' = \bar{f}'$.

Proposition 1.20 Tout prolongement analytique d'une fonction numérique infiniment dérivable est "dérivable" en $x \in \mathbb{R}_o$, $x = t + u$.

Preuve : on prend bien sûr $H = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot u^k$ et $|\bar{f}(x+v) - \bar{f}(x) - H \times v| = |\sum_{k \geq 2} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot [(u+v)^k - u^k - k u^{k-1} v]| < b_2 \cdot u^2$ comme

précédemment. \square

Remarque 1.21 1) On a $\bar{f}'(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot u^k$. On remarque qu'on ne dérive que par rapport à la partie standard t de x . On dira donc que cette opération de "dérivation" fournit la dérivée partielle de \bar{f} par rapport à la partie standard de x .

2) On démontre de même que \bar{f} est infiniment "différentiable" en x et l'on définit par récurrence les "dérivées" successives de la fonction \bar{f} . On retrouve la formule bien connue de l'Analyse standard :

$$\bar{f}^{(q)}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+q)}(t)}{k!} \cdot u^k$$

et $\bar{f}^{(q)} = f^{(q)}$.

Proposition 1.22 On a $\bar{f}(x+v) = \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \bar{f}^{(q)}(x) \times v^q$ pour $x \in \mathbb{R}_o$ et $|v| \ll 1$.

Preuve : on prouve l'égalité jusqu'au moment infinitésimal d'ordre N . On a $\bar{f}_N(x+v) = \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot (u+v)^k$.

Classiquement, $\bar{f}_N(x+v) = \sum_{0 \leq k \leq N} \sum_{0 \leq q \leq k} f^{(k)}(t) \cdot \left(\frac{u^{k-q}}{(k-q)!} \times \frac{v^q}{q!} \right) = \sum_{0 \leq q \leq N} \frac{1}{q!} \left[\sum_{q \leq k \leq N} \frac{1}{(k-q)!} f^{(k)}(t) \cdot u^{k-q} \right] \times v^q$ qui a le même début que $\sum_{q \leq N} \frac{1}{q!} \bar{f}^{(q)}(x) \times v^q$. \square

1.5 Deux types de différentielles pour les prolongements analytiques des fonctions analytiques standard et leurs relations réciproques

Lemme 1.23 (Théorème des différences finies [10, p.204])

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle. $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ et $\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n$. On a $\Delta^p u_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k u_{n+k}$.

Preuve : par récurrence à partir de $\Delta^2 u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$. \square

Il en est de même du prolongement analytique d'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^∞ , à l'intérieur d'une coupure infinitésimale $]t[$ pour l'opérateur de différentiation D^p défini par récurrence comme Δ^p .

Définition 1.24 On appelle p -ième différentielle de f et on note $D^p \bar{f}$ la fonction de \mathbb{R}_o dans $]0[$ définie par récurrence par

$$D \bar{f}(x) = \bar{f}(x+o) - \bar{f}(x) \text{ et } D^{p+1} \bar{f}(x) = D^p \bar{f}(x+o) - D^p \bar{f}(x).$$

On démontre immédiatement que $(D \bar{f})' = D \bar{f}'$ et, dans le cas général $(D F)' = D F'$.

Proposition 1.25 On a :

$$D^p \bar{f}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k \cdot \bar{f}(x + ko) = \sum_{n \geq 0} \frac{X_p^n(u)}{n!} f^{(n)}(t) \text{ avec}$$

$$X_p^n(u) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k \cdot (u + ko)^n \text{ et } t = x_S, u = x - x_S.$$

Preuve : La démonstration est la même que celle du **Lemme 1.14**.

□

Corollaire 1.26 $X_p^n(u) = 0$ si $n < p$ et $X_p^p(u) = p! \cdot o^p$.

Preuve : on écrit la relation précédente pour un polynôme \bar{f} quelconque de degré $p - 1$. $D^p \bar{f}(x) = 0$ car le degré du polynôme diminue d'une unité à chaque *différenciation*.

On a aussi $f^{(n)}(t) = 0$ si $n > p$ et donc aucune condition sur $X_p^n(u)$ dans ce cas. Par contre, si $n < p$, il faut que les coefficients $X_p^n(u)$ soient tous nuls pour que la relation $D^p \bar{f}(x) = 0$ soit vérifiée quelle que soit la fonction \bar{f} .

Enfin, $D^{p-1} \bar{f}(x) = a_{p-1}(p-1)! o^{p-1}$ et $f^{(p-1)}(t) = a_{p-1}(p-1)!$ où a_{p-1} est le coefficient du monôme dominant de f . Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{X_{p-1}^n(u)}{n!} f^{(n)}(t) = 0 + \frac{X_{p-1}^{p-1}(u)}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t) + 0 = D^{p-1} \bar{f}(x) \text{ et}$$

$$X_{p-1}^{p-1}(u) = (p-1)! \cdot o^{p-1} \quad \square$$

Définition 1.27 On appelle *différentielle d'ordre n* notée $d^n \bar{f}$, la fonction de \mathbb{R}_o dans $]0[$ définie depuis *G.W. Leibniz* par

$$d^n \bar{f}(x) = \bar{f}^{(n)}(x) \times o^n \quad (o = dx).$$

Remarque 1.28 1) On n'utilise pas la notation de Leibniz

$$\frac{d^n \bar{f}}{dx^n} = \bar{f}^{(n)}$$

car o n'est pas inversible.

$$2) \text{ D'après la } \textbf{Définition 1.24}, D \bar{f}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{d^n \bar{f}(x)}{n!}.$$

Proposition 1.29 On a $D^p \bar{f}(x) = \sum_{n \geq p} X_p^n \times \frac{d^n \bar{f}(x)}{n!}$ avec $X_p^n =$

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^n.$$

Cette relation donne les différentielles p -ièmes en fonction des différentielles d'ordre n avec $n \leq p$. On donne plus loin les relations réciproques.

Remarque 1.30 En particulier :

$$D \bar{f}(x) = d \bar{f}(x) + \frac{1}{2} d^2 \bar{f}(x) + \frac{1}{6} \cdot d^3 \bar{f}(x) + \frac{1}{24} \cdot d^4 \bar{f}(x) + \dots,$$

$$D^2 \bar{f}(x) = d^2 \bar{f}(x) + d^3 \bar{f}(x) + \frac{7}{12} \cdot d^4 \bar{f}(x) + \dots$$

$$D^3 \bar{f}(x) = d^3 \bar{f}(x) + \frac{3}{2} \cdot d^4 \bar{f}(x) + \dots$$

Proposition 1.31 On a $\frac{d^n \bar{f}(x)}{n!} = \sum_{p \geq n} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} \cdot \frac{D^p \bar{f}(x)}{p!}$ avec

$x \in \mathbb{R}_o$. K_{p-1}^{p-n} est la somme des $C_{p-1}^{p-n} = C_{p-1}^{n-1}$ produits possibles de $p - n$ facteurs pris parmi les $p - 1$ premiers entiers non nuls.

Preuve : On a $\bar{f}_N(x+ko) = \bar{f}(x) + \sum_{n=1}^N \frac{d^n \bar{f}(x)}{n!} k^n$ où N et k sont deux entiers finis suffisamment grands. On démontre par récurrence finie que $\bar{f}_N(x+ko) = \bar{f}(x) + \sum_{p=1}^N C_k^p \cdot D^p \bar{f}(x)$.

$$\text{Si } p \geq 2, C_k^p = \frac{k(k-1)\dots(k-(p-1))}{p!} = \frac{1}{p!} \left[\sum_{n=1}^p (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} k^n \right] \text{ et}$$

$$\bar{f}_N(x+ko) = \bar{f}(x) + k \cdot D\bar{f}(x) + \sum_{2 \leq p \leq N} \left[\sum_{1 \leq n \leq p} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} k^n \right] \cdot \frac{D^p \bar{f}(x)}{p!} = \bar{f}(x) + k \cdot D\bar{f}(x) + \sum_{1 \leq n \leq N} \left[\sum_{n \leq p \leq N}^{p \geq 2} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} \cdot \frac{D^p \bar{f}(x)}{p!} \right] k^n.$$

Le coefficient de k (pour $n = 1$) est $D\bar{f}(x) - \frac{D^2 \bar{f}(x)}{2} + \frac{D^3 \bar{f}(x)}{3} - \dots$ car $K_{p-1}^{p-1} = (p-1)!$. Il est égal à $d\bar{f}(x)$ d'après la première égalité. Les deux coefficients de k^n (pour $n \geq 2$) sont égaux et donc

$$\frac{d^n \bar{f}_N(x)}{n!} = \sum_{n \leq p \leq N} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} \cdot \frac{D^p \bar{f}(x)}{p!}$$

jusqu'à l'ordre N . On prolonge les égalités jusqu'à l'infini (pour toute valeur finie N)

$$\frac{d^n \bar{f}(x)}{n!} = \sum_{n \leq p} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} \cdot \frac{D^p \bar{f}(x)}{p!}.$$

□

Remarque 1.32 On trouve en particulier :

$$\begin{aligned} d\bar{f}(x) &= D\bar{f}(x) - \frac{D^2 \bar{f}(x)}{2} + \frac{D^3 \bar{f}(x)}{3} - \frac{D^4 \bar{f}(x)}{4} + \dots \\ d^2 \bar{f}(x) &= D^2 \bar{f}(x) - D^3 \bar{f}(x) + \frac{11}{12} \cdot D^4 \bar{f}(x) + \dots \\ d^3 \bar{f}(x) &= D^3 \bar{f}(x) - \frac{3}{2} \cdot D^4 \bar{f}(x) + \dots \end{aligned}$$

1.6 Sur le contexte historique de cette recherche

On donne ici deux citations, l'une est de N.Bourbaki, l'autre est de R.Godement :

"il faut bien reconnaître que la notation leibnizienne de différentielle n'a à vrai dire aucun sens ; au début du XIXème siècle, elle tomba dans un discrédit dont elle ne s'est relevée que peu à peu ; et, si l'emploi des différentielles premières a fini par être complètement légitimé, les différentielles d'ordre supérieure, d'un usage pourtant si commode, n'ont pas encore été vraiment réhabilitées jusqu'à ce jour" [10, p.216] et [11].

"Ces notions qui reposent sur des "infiniment petits" que personne n'a jamais pu définir, ont fait inutilement cogiter et divaguer beaucoup trop de gens pour qu'on leur attribue maintenant un autre rôle que celui d'une

explication historique de la notation différentielle" [7, p.260].

Ce problème ancien a été je crois, ici résolu au bénéfice de la rigueur "et" de la compréhension.

L'impossibilité à un moment de l'Histoire de satisfaire à la fois aux exigences de la rigueur *et* à une certaine "évidence" des résultats semble être l'un des leitmotiv des Eléments d'Histoire des Mathématiques de N.Bourbaki [10]. Ce conflit a bien sûr toujours été résolu au bénéfice de la rigueur mais on peut aujourd'hui reprendre cette question et tenter de concilier rigueur et évidence dans les démonstrations.

Quelques exemples :

On a justifié en 1.1 et 1.2 La méthode des fluxions [6] de I.Newton en définissant une algèbre totalement ordonnée \mathbb{R}_o avec laquelle on peut prolonger les fonctions C^∞ par des séries entières. Les propriétés d'espace vectoriel de \mathbb{R}_o permettent de justifier les égalisations faites par I.Newton entre deux expressions à l'ordre n .

En 1.3, on a établi le lien entre Différences finies et deux sortes de Différentielles ($D^p \bar{f}$ et $d^n f$) que G.W.Leibniz a seulement intuitivement perçu.

D'après N.Bourbaki en effet :

"il se tient très près du calcul des différences finies dont son calcul différentiel se déduit pas un passage à la limite que bien entendu, il serait en peine de justifier rigoureusement ; et par la suite il insiste volontiers sur le fait que les principes s'appliquent indifféremment à l'un et à l'autre" [10, p.208].

On peut appeler *Histonique* (l'Histonique est à l'Histoire des Sciences ce que la Bionique est à la Biologie) cette nouvelle manière de faire des Mathématiques (et de la Physique, cf. 4.4 et [5]) au delà des problématiques historiques. Il s'agit de reprendre les oeuvres des grands mathématiciens des siècles passés d'un point de vue "moderne".

Dans le même esprit, on montre en 2.5 qu'une nouvelle approche "cantorienne" des nombres entiers rejoint l'intuition newtonienne et en 3. que Leibniz a eu raison de percevoir une analogie entre Intégrale et Somme, Différentielle et Différence.

1.7 Le coût d'une révolution non standard

E.Benoit, spécialiste français de l'Analyse Non Standard de A.Robinson, résume ainsi la situation actuelle :

"L'immensité du savoir mathématique énoncé dans le formalisme classique de Cauchy-Bolzano-Weierstrass-Cantor-... rend important le coût d'une révolution non standard qu'on pourrait espérer. C'est la raison fondamentale qui fait que cette nouvelle théorie n'obtient pas dans la communauté mathématique la place à laquelle elle pourrait prétendre".

in page personnelle in <http://perso.univ-lr.fr/ebenoit/#ans>.

La situation est un peu différente pour cette Nouvelle Analyse Non Standard (que l'on pourrait noter ANS*) car elle appartient au cadre classique. C'est en effet en utilisant les notions standard de la Topologie Générale que l'on a démontré les propriétés de \mathbb{R}_o .

On fait ici un rapide bilan du changement d'habitudes mentales qui serait nécessaire pour adopter en Mathématiques, l'ensemble \mathbb{R}_o .

1 La propriété essentielle de \mathbb{R} qui manque à \mathbb{R}_o est l'existence d'une borne supérieure à tout sous-ensemble majoré (Théorème de Bolzano). Ainsi, $[0[$ est majoré par tous les nombres standard strictement positifs. On pourra y suppléer partiellement à partir de 5.4 avec l'étude de la continuité.

Cette perte entraîne celle des Théorèmes de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass mais surtout la perte du Théorème des valeurs intermédiaires qui est pourtant très intuitif.

Par exemple, la simple fonction $x \mapsto x^2$ envoie l'intervalle $[0, 1]$ sur la réunion disjointe $[0[[\cup [0, 1] \setminus [0[$. On montre qu'un prolongement analytique peut ne pas vérifier la propriété des valeurs intermédiaires seulement aux points $x \in \mathbb{R}_o$ tels que $f'(x_S) = 0$.

Proposition 1.33 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$ et $\bar{f} : \mathbb{R}_o \rightarrow \mathbb{R}_o$. On a $\bar{f}(x_1) = y_1$ et $\bar{f}(x_2) = y_2$ avec $x_1^S < x_2^S$ et $y_1^S < y_2^S$. Soit $y \in]y_1, y_2[$, si f est strictement monotone sur $]x_1, x_2[$, il existe au moins un $x \in]x_1, x_2[$ tel que $\bar{f}(x) = y$.

Preuve : on a $f(x_1^S) = y_1^S$ et $f(x_2^S) = y_2^S$. La fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, donc il existe $x_S \in]x_1^S, x_2^S[\subset \mathbb{R}$ tel que $f(x_S) = y_S$.

On admet $P(I) : \exists x^{(I)} = x_S + x_1 \cdot o + \dots x_I \cdot o^I$ tel que $\bar{f}(x^{(I)}) = y^{(I)}$, avec $y^{(I)} = y_S + y_1 \cdot o + \dots y_I \cdot o^I$ et l'on démontre $P(I+1)$. On cherche $x^{(I+1)} = x^{(I)} + x_{I+1} \cdot o^{I+1}$ tel que $\bar{f}(x^{(I+1)}) = y^{(I+1)}$. On simplifie l'équation et l'on trouve que $y_{I+1} = \bar{f}'(x^{(I)}) \times x_{I+1}$.

Le nombre x_{I+1} est déterminé si $\bar{f}'(x^{(I)})$ est inversible, c'est-à-dire $f'(x_S) \neq 0$. \square

2 \mathbb{R}_o n'est plus archimédien mais on construit en 2. une extension intrinsèque de \mathbb{N} pour recouvrer cette propriété.

Le "coût d'une révolution non standard" est donc très faible dans le cas de l'ANS* car, même s'il faut refaire toutes les démonstrations classiques, elles sont toujours élémentaires et internes au cadre logique du "formalisme de Cauchy-Bolzano-Weierstrass-Cantor..." (E.Benoit) qui est le cadre général des *Eléments de Mathématiques* de N.Bourbaki.

On précise que l'étude des propriétés différentielles et intégrales des fonctions de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o ne s'appuie pas du tout sur le 4ème volume (F.V.R.) du Traité de Bourbaki [11] puisque \mathbb{R}_o n'est pas un corps valué en tant qu'ensemble de scalaires, il n'est ni normé ni complet en tant qu'espace vectoriel mais surtout la Topologie est la topologie induite par la relation d'ordre total et pas celle de l'Espace vectoriel normé.

Pour mener à bien cette étude, on étudie d'abord dans le cadre général de la Topologie bourbachique, les propriétés des prolongements analytiques des fonctions C^∞ ou analytiques (cf. 1.2., 1.4 et 3.1) puis on définit des fonctions régulières qui ne diffèrent des fonctions précédentes que sur un point de détail ($F(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ou non) et les preuves des Théorèmes sont exactement les mêmes (cf. 1.3., 3.2 et 3.3).

Toute la section 5 appartient également au cadre de la Topologie bourbachique puisqu'il s'agit d'étudier les propriétés algébriques d'ensembles de nombres, totalement ordonnés et de ce fait, topologiques (cf. aussi la **Remarque 5.6**).

2 De nouveaux nombres "entiers" définis à l'unité près.

Propriétés des ensembles $\mathbb{N}[\Sigma]$ et \mathbb{N}

- 2.1. Conditions générales pour construire un ensemble de nombres entiers.
- 2.2. Construction formelle de $\mathbb{N}[\Sigma]$ et \mathbb{R}_o^{1+} .
- 2.3. Deux modèles non standard de l'Arithmétique de Peano.
- 2.4. Le point de vue de I.Newton sur les nombres entiers infiniment grands.

3. Une démonstration du Théorème Fondamental de l'Analyse Non Standard

- 3.1. Résolution de l'équation du premier ordre pour le prolongement analytique d'une fonction analytique standard.
- 3.2. Généralisation aux fonctions régulières, ou newtoniennes.
- 3.3. Résolution d'une équation différentielle d'ordre quelconque pour des fonctions régulières.

4. Le paradis newtonnien et la réhabilitation posthume de G.W.Leibniz

- 4.1. Introduction à cette étude d'Histoire.
- 4.2. Deux caractéristiques préalables de l'édifice newtonnien.
- 4.3. Une modernisation du calcul des fluxions de Newton.
- 4.4. Une comparaison des oeuvres de Newton et Leibniz.
- 4.5. La Théorie de l'Intégration de I.Newton.
- 4.6. Aux limites de l'édifice newtonien.
- 4.7. Les faiblesses de l'édifice Leibnizien.
- 4.8. La Théorie de l'Intégration de G.W.Leibniz.
- 4.9. Conclusion de cette étude d'Histoire.

2.1 Conditions générales pour construire un ensemble de nombres entiers

A la manière de Cantor [12, 13] et de Bourbaki [14] on "construit" un nouvel ensemble de nombres entiers en quotientant un certain type d'ensembles par une certaine relation d'équivalence (c'est l'équipotence entre deux ensembles presque quelconques pour le "cardinal" et une bijection croissante entre deux ensembles bien ordonnés pour l'"ordinal").

Deux autres conditions, également cantoriennes, semblent nécessaires pour pouvoir considérer chaque classe d'équivalence comme un entier naturel :

- 1) L'Espace-quotient est bien et totalement ordonné, il commence par 0 suivi de tous les entiers standard.
- 2) Il est muni d'une loi d'addition qui lui confère une structure de semi-groupe (monoïde) commutatif ou non.

La propriété de l'Espace-quotient d'être muni d'une application successeur qui lui confère la structure d'un "modèle non standard de l'Arithmétique de Peano" n'est pas *nécessaire* pour pouvoir considérer ses éléments comme des nombres entiers (elle n'est pas vérifiée par l'ensemble des nombres cardinaux ou ordinaux de Cantor).

2.2 Construction formelle de $\mathbb{N}[\Sigma]$ et \mathbb{R}_o^{1+}

Soit $\mathbb{R}_o^1 = \{x_1 = t + k \cdot o / t \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\}$.

J est l'ensemble des "intervalles" de \mathbb{R}_o^1 , notés $[[x_1, x'_1]]_1 = [[x_1, x'_1 + o]]_1 = [x_1, x'_1] \cap \mathbb{R}_o^1$ si $x_1, x'_1 \in \mathbb{R}_o^1$.

Remarque 2.1 *Ni \mathbb{R}_o ni \mathbb{R}_o^1 ne vérifient la propriété de la borne supérieure dans leur propre topologie. Les intervalles de J sont par contre tous bornés par leurs extrémités dans la topologie de \mathbb{R}_o^1 . Les bornes de ces intervalles sont donc uniques et bien définies.*

La relation d'équivalence sur J est la suivante :

$$[[x_1, x'_1]]_1 \equiv [[y_1, y'_1]]_1 \text{ ssi } x'_1 - x_1 = y'_1 - y_1.$$

On montre principalement que ces deux ensembles sont **deux modèles non standard isomorphes de l'Arithmétique de Peano**. Ce résultat va permettre d'intercaler entre \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}_o^+ , un ensemble inductif \mathbb{R}_o^{1+} ce qui permettra de faire des démonstrations par induction dans $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}_o^{1+}$.

On pourra compter exactement le nombre de pas o entre deux réels standard positifs mais **on ne peut pas définir un successeur dans \mathbb{R}^+** car ces nombres de pas sont toujours infiniment grands comme on va le démontrer. Ils n'ont donc pas de plus petite valeur possible.

Tout cela sera plus clair après l'introduction des notations \otimes ("croix") et \oslash ("slash").

L est la classe de l'intervalle $[[1 \cdot o, 2 \cdot o, 3 \cdot o, \dots x_1]]_1$.

On l'écrit $L = \#[[o, x_1]]_1$ et l'on dit que L est le **nombre d'éléments** de cette "suite" arithmétique de premier terme et de raison o .

On note $\Sigma = \#[[o, 1]]_1$ et, puisque $k = \#[[o, k \cdot o]]_1$, par généralisation on note $x_1 = L \otimes o$. Par conséquent $k \cdot o = k \otimes o$ et

$$\Sigma \otimes o = 1.$$

L ne dépend que de x_1 . On peut donc aussi noter $L = \Sigma \oslash x_1$ et puisque $1 = \#[[o]]_1$, on a aussi :

$$\Sigma \oslash o = 1.$$

Remarque 2.2 Les deux égalités $\Sigma \otimes o = 1$ et $\Sigma \oslash o = 1$ ne signifient pas du tout que Σ et o sont inverses l'un de l'autre puisque \otimes et \oslash ne sont pas des lois internes mais seulement des notations bien définies.

Ces deux notations sont suffisantes pour démontrer le Théorème suivant.

Théorème 2.3 Les ensembles \mathbb{R}_o^{1+} et $\mathbb{N}[\Sigma] = J/ \equiv$ sont en bijection par les applications bien définies $\varphi : \mathbb{R}_o^{1+} \longrightarrow \mathbb{N}[\Sigma]$, $x_1 \longmapsto \Sigma \oslash x_1$ et $\psi : \mathbb{N}[\Sigma] \longrightarrow \mathbb{R}_o^{1+}$, $L \longmapsto L \otimes o$.

Preuve : $L = \#[[o, x_1]]_1$ s'écrit à la fois $L = \Sigma \oslash x_1$ et $x_1 = L \otimes o$. En les combinant, on obtient les identités remarquables :

$$(\Sigma \oslash x_1) \otimes o = x_1 \text{ et } \Sigma \oslash (L \otimes o) = L$$

qui signifient exactement :

$$\psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}_o^{1+}} \text{ et } \varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{N}[\Sigma]}.$$

□

Corollaire 2.4 On transfère la structure de semi-groupe totalement ordonné de $(\mathbb{R}_o^{1+}, +, \leq)$ vers $(\mathbb{N}[\Sigma], \oplus, \preceq)$ par les applications φ et ψ et

$$L \oplus M = \Sigma \oslash (L \otimes o + M \otimes o).$$

On peut donc considérer (cf. 2.1) $\mathbb{N}[\Sigma]$ comme un nouvel ensemble de nombres entiers naturels.

Proposition 2.5 *Les éléments de $\mathbb{N}[\Sigma] \setminus \mathbb{N}$ sont tous plus grands que tous les entiers standard de \mathbb{N} . Ils sont infiniment grands mais définis à l'unité près (i.e. $L \oplus 1 \neq L$).*

Preuve : si x_1 n'est pas infinitésimal, $o \ll x_1$ et, par isomorphisme L est supérieur à tous les entiers standard. Si $L \oplus 1 = L$ alors $\psi(L \oplus 1) = \psi(L) + o = \psi(L)$. Contradiction. \square

Les entiers infiniment grands sont "définis" comme le sont les entiers finis standard. On peut définir maintenant une application "successeur".

2.3 Deux modèles non standard de l'Arithmétique de Peano

Définition 2.6 *Soient $s : \mathbb{R}_o^{1+} \longrightarrow \mathbb{R}_o^{1+*}$, $x_1 \longmapsto x_1 + o$ et $S : \mathbb{N}[\Sigma] \longrightarrow \mathbb{N}[\Sigma]^*$, $L \longmapsto L \oplus 1$. Ces applications "successeur" sont bien définies.*

Théorème 2.7 (Résultat principal)

(\mathbb{R}_1^+, s) et $(\mathbb{N}[\Sigma], S)$ sont deux modèles non standard isomorphes de l'Arithmétique de Peano [15, 16, 17].

Preuve : l'application s est bien une bijection. Il reste à prouver que \mathbb{R}_o^{1+} est l'ensemble minimal qui contient 0 et tous ses successeurs par s . Soit $E \subseteq \mathbb{R}_o^{1+}$ tel que $0 \in E$ et $s(E) \subseteq E$. On démontre que $E = \mathbb{R}_o^{1+}$.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}_o^{1+}$. $\Sigma \otimes x_1$ est le nombre d'éléments de $[[o, 2 \cdot o, \dots, x_1]]_1$ et l'on passe d'un terme à l'autre simplement en ajoutant o . Par conséquent, x_1 est le $\Sigma \otimes x_1$ -ième successeur de 0 par l'application s et $x_1 \in E$ puisque $0 \in E$ et $s(E) \subseteq E$.

Par isomorphisme, $(\mathbb{N}[\Sigma], S)$ est aussi un modèle non standard de l'Arithmétique de Peano. \square

Remarque 2.8 *Il fallait considérer $\Sigma \otimes x_1$ comme un nombre entier pour pouvoir appliquer la propriété $s(E) \subseteq E$ autant de fois (cf. 2.1).*

On peut définir une somme \oplus ("plus") et un produit \diamond ("fois") généralisés dans le **prolongement inductif** \mathbb{N}^+ de $\mathbb{N}[\Sigma]^+$, par les équations inductives [16, p.264] :

$$\begin{aligned} L \oplus 0 &= L \text{ et } L \oplus S(M) = L \oplus M \oplus 1. \\ L \diamond 1 &= L \text{ et } L \diamond S(M) = L \diamond M \oplus L. \end{aligned}$$

Ces lois sont définies de proche en proche, par induction dans \mathbb{N} .

On démontre par induction toutes les propriétés du semi-anneau totalement ordonné $(\aleph^+, \oplus, \diamond, \preceq)$ [14].

Proposition 2.9 *On a $\aleph^+ =$*

$$\left\{ \sum_{0 \leq k \leq N} a_k \Sigma^k / (N \in \mathbb{N}^*, a_0 \in \mathbb{Z}, a_N > 0) \text{ ou } (N = 0, a_0 \in \mathbb{N}) \right\}$$

On note par un produit externe $a_k \Sigma^k$ le nombre entier $(\Sigma \oslash a_k) \diamond \Sigma \diamond \cdots \diamond \Sigma$ formé de $k - 1$ produits.

Preuve : \aleph^+ contient au moins tous ces nombres entiers puisque c'est un sur-anneau de $\mathbb{N}[\Sigma] = \varphi(\mathbb{R}_o^{1+}) =$

$$\{\Sigma \oslash a_1 \oplus a_0 / (a_1 \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } a_0 \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (a_1 = 0 \text{ et } a_0 \in \mathbb{N})\}$$

Il ne contient qu'eux puisque c'est l'ensemble minimal contenant 1 et Σ , comme prolongement inductif de $\mathbb{N}[\Sigma]$. \square

2.4 Le point de vue de I.Newton sur les nombres entiers infiniment grands

Sans souci de justification, I.Newton développe les mêmes idées dans La méthode des fluxions et des suites infinies [6].

Son traducteur en Français, le Marquis de Buffon exprime très clairement cette conception très originale pour nous aujourd'hui, de nombres infiniment grands mais définis à l'unité près, bien avant l'époque cantorienne qui a fait prévaloir l'idée que les entiers infiniment grands ne sont pas définis à l'unité près.

Je cite longuement ce texte peu connu de 1740 :

"Le Nombre n'est qu'un assemblage d'unités de même espèce ; l'unité n'est point un nombre, l'unité désigne une seule chose en général ; mais le premier Nombre 2 marque non seulement deux choses, mais encore deux choses semblables, deux choses de même espèce ; il en est de même de tous les autres Nombres.

Mais ces Nombres ne sont que des représentations et n'existent jamais indépendamment des choses qu'ils représentent ; les caractères qui les désignent ne leur donnent point de réalité, il leur faut un sujet, ou plutôt un assemblage de sujets à représenter pour que leur existence soit possible ; j'entends leur existence intelligible, car ils n'en peuvent avoir de réelle ;

or un assemblage d'unités ou de sujets ne peut jamais être que fini, c'est-à-dire, on pourra toujours assigner les parties dont il est composé, par conséquent le Nombre ne peut être Infini quelque augmentation qu'on lui donne.

Mais dira-t-on le dernier Terme de la suite naturelle 1, 2, 3, 4, etc n'est-il pas Infini ? n'y a-t-il pas des derniers Termes d'autres suites encore plus Infinites que le dernier terme de la suite naturelle ? Il paraît que les Nombres doivent à la fin devenir Infinites, puisqu'ils sont toujours susceptibles d'augmentation ; à cela je réponds que cette augmentation dont ils sont susceptibles, prouve évidemment qu'ils ne peuvent être Infinites ; je dis de plus que dans ces suites il n'y a pas de derniers Termes, que même leur supposer un dernier terme, c'est détruire l'essence de la suite qui consiste dans la succession des Termes qui peuvent être suivis d'autres Termes et ces autres Termes encore d'autres, mais qui tous sont de même nature que les précédents, c'est-à-dire, tous finis, tous composés d'unités ; ainsi lorsqu'on suppose qu'une suite a un dernier Terme, et que ce dernier Terme est un nombre infini, on va contre la définition du nombre et contre la loi générale des suites" [6, Préface, pages ix et x].

C'est exactement cette conception du nombre entier (fini ou non) de termes d'une suite arithmétique de raison o , bornée des deux côtés, qui a été formalisée en 2.2 et va être maintenant utilisée pour une nouvelle Théorie de l'Intégration.

3 Une démonstration du Théorème Fondamental de l'Analyse Non Standard

On a montré en 1.6 et en 2.4 que l'intuition mathématique de I.Newton exprimée dans son Traité des fluxions [6] est rigoureusement correcte. On montre ici que l'intuition de G.W.Leibniz, portant sur une analogie entre Analyse Discrète et Analyse Non Standard l'est également.

Remarque 3.1 1) Dans l'article [5] on confirme le bien fondé de l'intuition physique de I.Newton concernant la gravitation, telle qu'elle est exprimée dans les toutes dernières lignes des Principia.

2) On appelle "Histonique" (cf. aussi 1.6) la tentative de reprendre des questions scientifiques là où les ont laissées les plus grands mathématiciens des siècles passés, pour y donner de nouvelles réponses qui satisfont aux exigences de la Mathématique d'aujourd'hui (une étude d'Histonique est donnée à la section suivante).

Conformément donc à l'intuition leibnizienne (cf. [10, p.208] et 1.6), tout se passe dans l'intégration d'une équation différentielle d'ordre quelconque, *comme si* les sommes et les différences étaient finies et définies, alors que les sommes sont infinies (elles ont un nombre infiniment grand mais défini de termes) et les différences sont infinitésimales.

La démonstration de cette analogie intuitivement perçue par G.W.Leibniz, entre Analyse Discrète et Analyse Non Standard, devient possible parce que les ensembles \mathbb{R}_o^{1+} et \mathbb{R}_o ont "presque" les mêmes propriétés que les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{R} .

3.1 Résolution de l'équation du premier ordre pour le prolongement analytique d'une fonction analytique standard

Lemme 3.2 (Théorème des sommes et différences finies [10, p.204])

On définit sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}^*(\mathbb{N}, \mathbb{R})$) des suites numériques standard (resp. de premier terme nul) deux opérateurs Σ et Δ qui sont réciproques l'un de l'autre :

$$\Delta : \mathcal{F}^*(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), u \mapsto v = \Delta u$$

avec $v_n = u_{n+1} - u_n$.

$$\Sigma : \mathcal{F}^*(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), v \mapsto u = \Sigma v$$

avec $u_n = \sum_{0 \leq k < n} v_k$ ($u_0 = 0$).

Preuve : on a $(\Delta \Sigma v)_n = (\Sigma v)_{n+1} - (\Sigma v)_n = v_n$ et $(\Sigma \Delta u)_n = \sum_{0 \leq k < n} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$ après n simplifications. \square

On peut considérer chaque fonction \bar{f} de \mathbb{R}_o^1 dans \mathbb{R}_o comme formée de deux "suites" $(\bar{f}(L \otimes o))_{L \in \mathbb{N}[\Sigma]}$ et $(\bar{f}(-L \otimes o))_{L \in \mathbb{N}[\Sigma]}$.

Définition 3.3 Soit f une fonction analytique en t , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Une primitive G_1 de \bar{f} est une fonction de \mathbb{R}_o^1 dans \mathbb{R}_o qui est une solution de l'équation différentielle

$$DG_1(x_1) = \bar{f}(x_1) \times o$$

pour tous les x_1 tels que $x_1^S \in]t - R, t + R[\subset \mathbb{R}$ où R est le rayon de convergence de la fonction analytique f en t ($R \in \mathbb{R}^{+*}$). De même pour G , fonction de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o .

On démontre immédiatement que si f est analytique en t , de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*}$, alors \bar{f} est "analytique", c'est-à-dire $\bar{f}(t + x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} x^k$ pour tous les $x \in \mathbb{R}_o$ tels que $|x_S| < R$.

Théorème 3.4 La primitive de \bar{f} qui vérifie la condition initiale $G_1(t) = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}_o$, est la fonction de \mathbb{R}_o^1 dans \mathbb{R}_o définie par la somme intégrale :

$$G_1(x_1) = a_0 + \sum_{y_L \in [[t, x_1[[[1} \bar{f}(y_L) \cdot o$$

si $x_1 \geq t$ et

$$G_1(x_1) = a_0 - \sum_{y_L \in [[-t+o, -x_1+o[[[1} \bar{f}(-y_L) \cdot o$$

si $x_1 \leq t$.

Preuve : elle est la même que celle du Lemme, il y a seulement $\Sigma \otimes x_1$ simplifications. On peut aussi démontrer la relation par induction dans \mathbb{R}_o^{1+} et \mathbb{R}_o^{1-} .

Il faut maintenant préciser les propriétés des fonctions intégrales G . On sait déjà que ce ne sont pas des prolongements analytiques d'une fonction analytique standard car la condition $G_1(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ n'a aucune raison d'être toujours vérifiée.

Théorème 3.5 G_1 , primitive de \bar{f} valant a_0 en $t \in \mathbb{R}$, est une série entière de $x_1 \in]t - R, t + R[\subset \mathbb{R}_o$, i.e.

$$G_1(t + x_1) = a_0 + \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l \times x_1^l$$

avec $\mathcal{A}_l = \sum_{m \geq l-1} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} a_{m,l} \cdot o^{m+1-l} \in \mathbb{R}_o$ pour certains coefficients standard $a_{m,l}$ que l'on précisera.

Preuve : 1) on démontre la relation pour $x_1 = k \cdot o$ avec $k \geq 0$.

$$G_1(t + k \cdot o) - G_1(t) = \sum_{0 \leq n < k} \bar{f}(t + n \cdot o) \times o =$$

$$\sum_{0 \leq n < k} \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} n^m \cdot o^{m+1} = \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \sum_{0 \leq n < k} p_m(n \cdot o) \times o.$$

On note $p_m : \mathbb{R}_o \rightarrow \mathbb{R}_o, x \mapsto x^m$ et q_m la primitive de p_m qui vaut 0 en 0. On admet provisoirement que q_m est un polynôme de degré $m + 1$ et l'on note $a_{m,l}$ le coefficient de $x^l \times o^{m+1-l}$ pour $1 \leq l \leq m + 1$ (cf. les deux Lemmes).

$$G_1(t + k \cdot o) - G_1(t) = \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \sum_{0 \leq n < k} Dq_m(n \cdot o) = \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} q_m(k \cdot o)$$

$$= \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} \cdot (k \cdot o)^l \times o^{m+1-l} = \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l \times (k \cdot o)^l.$$

A peu près le même calcul vaut pour $k \leq 0$.

2) le même calcul peut se faire pour $G_1(t + x_1) - G_1(t)$ avec $x_1 = L \otimes o$ ou $-L \otimes o$ et $|x_1^S| < R$. On trouve de même que $G_1(t + x_1) = a_0 + \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l \times x_1^l$. \square

Lemme 3.6 Soit $P_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $P_m(N) = N^m$. On cherche $Q_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\Delta Q_m(N) = Q_m(N + 1) - Q_m(N) = P_m(N)$ et $Q_m(0) = 0$. C'est la fonction $Q_m = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} \cdot P_l$. Les coefficients $a_{m,l}$ sont tels que les matrices triangulaires d'ordre $m + 1$ $(a_{m,l})_{1 \leq l \leq m+1}$ et $(C_l^s)_{1 \leq l \leq m+1; 0 \leq s < l}$ soient inverses l'une de l'autre.

Preuve : $Q_m = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} P_l$ donne $\Delta Q_m = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} \Delta P_l = P_m$ et $\Delta P_l = \sum_{0 \leq s < l} C_l^s N^s$ donc $\Delta P_l = \sum_{0 \leq s < l} C_l^s P_s$. \square

Lemme 3.7 Soit $p_m : \mathbb{R}_o^{1+} \rightarrow \mathbb{R}_o, p_m(x_1) = x_1^m$. On cherche la primitive q_m de la fonction p_m qui vaut 0 en 0. C'est le polynôme $q_m = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} [p_l \times o^{m+1-l}]$.

Preuve : c'est la même que précédemment. On montre que $[p_m \cdot o] = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l} [Dp_l \cdot o^{m+1-l}]$ et $[Dp_l \cdot o^{m+1-l}] = \sum_{0 \leq s < l} C_l^s [p_s \cdot o^{m+1-s}]$. \square

Remarque 3.8 1) On trouve par calcul que $q_0 = p_1$; $q_1 = \frac{p_2}{2} - \frac{p_1}{2}o$; $q_2 = \frac{p_3}{3} - \frac{p_2}{2}o + \frac{p_1}{6}o^2$; $q_3 = \frac{p_4}{4} - \frac{p_3}{2}o + \frac{p_2}{4}o^2$; $q_4 = \frac{p_5}{5} - \frac{p_4}{2}o + \frac{p_3}{3}o^2 - \frac{p_1}{30}o^4$.

2) On peut aussi exprimer les coefficients $a_{m,l}$ en fonction des Nombres de Bernouilli B_p . On trouve :

$$a_{m,l} = (-1)^{m+1-l} \sum_{0 \leq p \leq m+1-l} \frac{m!}{l!p!(m+1-l-p)!} B_p$$

On prolonge la fonction G_1 sur \mathbb{R}_o par $G(t+x) = G(t) + \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l \times x^l$ pour tous les $x \in \mathbb{R}_o$ tels que $x_S \in]t-R, t+R[\subset \mathbb{R}$.

On vérifie que la fonction G est une primitive de \bar{f} sur \mathbb{R}_o (la relation $DG = \bar{f}o$ est vérifiée sur \mathbb{R} et l'on rappelle que la "dérivation" se fait par rapport à la partie standard t de x).

Théorème 3.9 G est infiniment "dérivable" (cf. 1.3) en t et $\mathcal{A}_l = \frac{G^{(l)}(t)}{l!}$.

$$G(t+x) = \sum_{l \geq 0} \frac{G^{(l)}(t)}{l!} \times x^l$$

Preuve : 1) On veut démontrer qu'il existe H tel que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*}) (\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*}) (\forall x \in \mathbb{R}_o) |x| < \eta \Rightarrow |G(t+x) - G(t) - H \times x| < \varepsilon \times |x|$.

On prend bien sûr $H = \mathcal{A}_1$ et $b_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|\mathcal{A}_2| < b_2$.

L'ordre lexicographique donne $I = |G(t+x) - G(t) - \mathcal{A}_1 \times x| = |\mathcal{A}_2 \times x^2 + \mathcal{A}_3 \times x^3 + \dots| < b_2 \cdot x^2 < \varepsilon \times |x|$ dès que $|x| < \eta < \frac{\varepsilon}{b_2}$.

On prend $\varepsilon \ll 1$ pour que x soit infinitésimal.

On a donc $G'(t) = \mathcal{A}_1$.

2) On démontre de même que $G'(t+x) = G'(t) + \sum_{l \geq 1} (l+1) \mathcal{A}_{l+1} \times x^l =$

$G'(t) + \sum_{l \geq 2} l \mathcal{A}_l \times x^{l-1}$ pour $|x| < R$.

Il faut trouver H tel que $I = |G(t+y) - G(t+x) - H \times (y-x)| < \varepsilon \times |y-x|$. C'est bien sûr $H = \sum_{l \geq 1} l \mathcal{A}_l \times x^{l-1}$.

$$I = \left| \sum_{l \geq 2} \mathcal{A}_l [y^l - x^l - l x^{l-1} (y-x)] \right| = |\mathcal{A}_2 (y-x)^2 + u^3| \leq$$

$b_2 \cdot |y-x|^2$ si $\mathcal{A}_2^S \neq 0$, u^3 désigne un infinitésimal d'ordre 3 et $I < \varepsilon \times |y-x|$ dans les mêmes conditions que précédemment.

Si $\mathcal{A}_2^S = 0$, on remarque que $y^l - x^l - l x^{l-1} (y-x) = u_l |y-x|^2$ pour $p \geq 3$ et un certain nombre infinitésimal u_l , alors $I \ll |y-x|^2 < \varepsilon |y-x|$ pour $\eta = \varepsilon$.

3) On pose $\mathcal{B}_l = (l+1) \mathcal{A}_{l+1}$ et $G'(t+x) = G'(t) + \sum_{l \geq 1} \mathcal{B}_l \times x^l$

pour $|x| < R$ (cf. 2.).

Par récurrence, on démontre que $G^{(k)}(t) = k! \mathcal{A}_k$ et que $G^{(k)}(t+x) = G^{(k)}(t) + \sum_{l \geq 1} (l+1)(l+2) \dots (l+k) \mathcal{A}_{l+k} \times x^l$ (cf.

1. et 2.). \square

Cette démonstration n'utilise pas les valeurs particulières de \mathcal{A}_l en fonction de f , elle est donc générale à toutes les séries entières de rayon de convergence standard non nul, fonctions qui vont être maintenant définies comme fonctions régulières de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o .

Corollaire 3.10 $G(t+x+y) = \sum_{k \geq 0} \frac{G^{(k)}(t+x)}{k!} \times y^k$ pour $|x_S| < R$, $|y_S| < R$ et $|x_S + y_S| < R$. $G^{(k)}(t+x) = G^{(k)}(t) + \sum_{l \geq 1} \frac{G^{(l+k)}(t)}{(l+k)!} \times x^l$ pour $|x_S| < R$.

3.2 Généralisation aux fonctions régulières ou newtoniennes de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o

Les fonctions primitives G n'ayant aucune raison de toujours vérifier $G(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, on définit des fonctions de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o qui ont les mêmes propriétés que les fonctions \bar{f} (exceptée $\bar{f}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$) pour ensuite pouvoir intégrer des équations différentielles d'ordre quelconque.

Définition 3.11 Une fonction F de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o est régulière ou newtonienne en $t_o \in \mathbb{R}$ s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres non standard telle que l'ensemble $E = \{r \in \mathbb{R}^{+*} / (\forall x \in \mathbb{R}_o) |x_S| < r \Rightarrow F(t_o + x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n\}$ ne soit pas réduit à l'ensemble \emptyset .

Remarque 3.12 1) R est la borne supérieure de l'intervalle $E =]0, R[$ ou $]0, R]$ et $R > 0$ avec la possibilité que $R = +\infty$. R est bien sûr le rayon de convergence de la "série entière" en t_0 .

2) On ne peut recourir ici au Lemme d'Abel car la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ n'est pas "convergente" dans la topologie de \mathbb{R}_o si $|x| < 1$, seulement si $|x| \ll 1$.

Proposition 3.13 si F est régulière en t_0 , F est infiniment "différentiable" en $t_0 + x$ avec $|x_S| < R$. On note $F^{(n)}(t_0) = n! \cdot a_n$ et $F(t_0 + x + y) = \sum_{k \geq 0} \frac{F^{(k)}(t_0 + x)}{k!} \times y^k$ si $|x_S| < R$, $|y_S| < R$ et $|x_S + y_S| < R$ avec $F^{(k)}(t_0 + x) = \sum_{l \geq 0} \frac{(k+l)!}{l!} a_{k+l} \times x^l$.

Preuve : pour $x = 0$, c'est la même que le **Théorème 3.9**.

Remarque 3.14 La dernière formule n'est pas la dérivée d'une série entière. On cherche comme aux points 2 et 3 de la preuve du Théorème précédent un nombre $H = a_k = \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}$ tel que $|F(t_0 + x) - a_0 - a_1 \times x - \dots - a_{k-1} \times x^{k-1} - H \times x^k| < \varepsilon \times |x|^k$ pour $|x| < \eta$.

Définition 3.15 Une primitive d'une fonction quelconque F est une fonction G de \mathbb{R}_o dans lui-même, qui est solution de l'équation différentielle $DG(t_0 + x) = G(t_0 + x + o) - G(t_0 + x) = F(t_0 + x) \times o$ pour $|x_S| < R$.

Remarque 3.16 On montre en 4.6 que cette fonction est fortement indéterminée. C'est pourquoi on limite à partir de maintenant la notion Non Standard de "primitive" aux seules fonctions régulières.

Théorème 3.17 F est une fonction régulière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*}$ en $t_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une seule primitive de F qui soit régulière et vaille 0 en t_0 .

C'est la série entière définie par $G(t_0 + x) = \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l \times x^l$ pour $|x| < R$ avec $\mathcal{A}_l = \sum_{m \geq l-1} \frac{F^{(m)}(t_0)}{m!} a_{m,l} \cdot o^{m+1-l} = \frac{G^{(l)}(t_0)}{l!}$.

Preuve : 1) on montre comme précédemment que la relation est vérifiée pour $x_1 \in \mathbb{R}_o^1$ (cf. le **Théorème 3.5**).

2) s'il existait deux prolongements réguliers sur \mathbb{R}_o qui coïncident sur \mathbb{R}_o^1 , il existerait une fonction régulière K vérifiant $K(t_0 + x_1) = 0$ pour tous les $x_1 \in \mathbb{R}_o^1$ de $]t_0 - R, t_0 + R[$. On démontre par récurrence que $K^{(p)}(t_0 + x_1) = 0$ en utilisant la condition de différentiabilité à l'ordre p de K ($p \geq 1$) en $t_0 + x_1$ dans \mathbb{R}_o^1 et $K(t_0 + x) = K(t_0) + K'(t_0) \times x + \dots = K(t_0) = 0$.

3) la démonstration de $G(t + x) = \sum_{l \geq 1} \frac{G^{(l)}(t)}{l!} \times x^l$ est la même que précédemment (cf. le **Théorème 3.9**). \square

Remarque 3.18 1) On a :

$$G'(t) = F(t) + \frac{1}{2} \cdot F'(t) \times o + \frac{1}{12} \cdot F''(t) \times o^2 + \dots + \frac{a_{m,1}}{m!} \cdot F^{(m)}(t) \times o^m + \dots$$

Contrairement à l'Analyse Standard, la "dérivée" d'une fonction intégrale n'est pas exactement égale à la fonction de départ. C'est la "différentielle" première qui annule l'"intégration" (cf. le **Théorème Fondamental**).

2) D'après la définition des fonctions régulières, $F(t_0 + u) = \sum_{k \geq 0} \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!} \times u^k$ pour $|u| \ll 1$. La sous-section 1.5 se

généralise donc sans changement aux fonctions régulières de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o .

On écrit le Théorème Fondamental de l'Analyse Non Standard sous une forme analogue au **Lemme 3.2**.

Théorème 3.19 Théorème Fondamental de l'Analyse Non Standard*

$\mathfrak{F}(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o)$ est l'ensemble des fonctions régulières de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o .

$\mathfrak{F}^*(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o)$ est le sous-ensemble de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o)$ des fonctions valant 0 en 0.

On définit sur ces deux ensembles, deux opérateurs S et D qui sont réciproques l'un de l'autre.

$$D : \mathfrak{F}^*(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o), G \mapsto F$$

F est telle que $F(x) \times o = DG(x) = G(x + o) - G(x)$ et

$$S : \mathfrak{F}(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o) \rightarrow \mathfrak{F}^*(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o), F \mapsto G$$

G est l'unique primitive régulière de F , valant 0 en 0 (cf. le Théorème précédent).

Preuve : il suffit de vérifier que D est bien défini.

$$DG = G'o + \frac{1}{2}G''o^2 + \dots = Fo, \text{ donc } F = G' + \frac{1}{2}G''o + \dots$$

1) On montre que F est "dérivable" en 0.

$$I = |F(x) - F(0) - H \times x| = |[G'(x) + \frac{1}{2}G''(x)o + \dots] - [G'(0) + \frac{1}{2}G''(0)o + \dots] - [G''(0) + \frac{1}{2}G'''(0)o + \dots]| = |\frac{1}{2}[G'''(0) + \frac{1}{2}G^{iv}(0)o + \dots] + \frac{1}{6}[G^{iv}(0) + \frac{1}{2}G^v(0)o + \dots]x + \dots| \times x^2.$$

Si $G'''(0)_S \neq 0$, on prend ε infinitésimal, $b_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|\frac{1}{2}G'''(0)_S| < b_2$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{b_2}$. Si $G'''(0)_S = 0$, $I = u \times x^2 \ll x^2 < \varepsilon \times x$ ($\eta = \varepsilon$).

2) On a $F'(0) = H = G''(0) + \frac{1}{2}G'''(0) \times o + \dots$

De même, on démontre sur \mathbb{R}_o que $F' = G'' + \frac{1}{2}G'''o + \dots$ et, par récurrence sur p , que $F^{(p)} = G^{(p+1)} + \frac{1}{2}G^{(p+1)}o + \dots$

3) On démontre que F est régulière par une permutation des signes de somme qui ne pose aucune difficulté en ANS*.

$$DG = F \times o, \text{ donc } F(t + x) = \sum_{k \geq 0} \frac{G^{(k+1)}(t+x)}{(k+1)!} \times o^k = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} [\sum_{k \geq 0} \frac{G^{(p+k+1)}(t)}{(k+1)!} o^k] \times x^p \text{ pour } |x_S| < R \text{ et } F(t + x) = \sum_{p \geq 0} \frac{F^{(p)}(t)}{p!} \times x^p$$

4) On vérifie que $DS = Id_{\mathfrak{F}(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o)}$ et $SD = Id_{\mathfrak{F}^*(\mathbb{R}_o, \mathbb{R}_o)}$ (cf. le **Lemme 3.2**). \square

Remarque 3.20 On note $G = S[F \times o]$ lorsque $G(x_1) = \sum_{y_L \in [[0, x_1[[_1]} F(y_L) \times o$.

3.3 Résolution d'une équation différentielle d'ordre quelconque pour des fonctions régulières

On a résolu l'équation différentielle du 1er ordre $DG = F \times o$ par $G = S[F \times o]$ (c'est le **Théorème 3.4**) dans le cas où F et G sont régulières. On fait de même pour intégrer une équation différentielle d'ordre supérieur.

Théorème 3.21 *Soit une fonction F quelconque de \mathbb{R}_0 dans \mathbb{R}_0 . Toutes les fonctions G_p qui sont solutions du système différentiel d'ordre $p : D^k G_p(0) = C_k \times o^k$ pour $0 \leq k < p$ et $C_k \in \mathbb{R}_o$ (ce sont les conditions initiales) et $D^p G_p(x_1) = F(x_1) \times o^p$, sont les fonctions G_p définies sur \mathbb{R}_o^1 par*

$$G_p(x_1) = S^p[F \times o^p]_{(x_1)} + C_0 + C_1 \times x_1 + C_2 \times \frac{x_1(x_1 - o)}{2} \dots C_{p-1} \times B_{x_1}^{p-1}$$

avec

$$S^p[F \times o^p]_{(x_1)} = \sum_{y_{L_p} \in [[0, x_1[[[1}} \sum_{y_{L_{p-1}} \in [[0, L_p \otimes o[[[1}} \dots \sum_{y_{L_1} \in [[0, L_2 \otimes o[[[1}} F(y_{L_p}) \times o^p$$

et $B_{x_1}^k = \frac{x_1(x_1 - o) \dots (x_1 - (k-1)o)}{k!}$ (coefficient du binôme dans \mathbb{R}_o^{1+}).

Preuve : la démonstration se fait par récurrence sur p .

$$G_p(x_1) - G_p(0) = \sum_{y_{L_p} \in [[0, x_1[[[1}} [DG_p(y_{L_p}) - DG_p(0)] + \sum_{y_{L_p} \in [[0, x_1[[[1}} DG_p(0)$$

$$= \sum_{y_{L_p} \in [[0, x_1[[[1}} \sum_{y_{L_{p-1}} \in [[0, y_{L_p}[[[1}} D^2 G_p(y_{L_2}) + (\Sigma \otimes x_1) \otimes (C_1 \times o).$$

$$\text{Donc } S^2[D^2 G_p]_{(x_1)} = S^2[D^2 G_p - D^2 G_p(0)]_{(x_1)} + S^2[C_2 \times o^2]_{(x_1)} =$$

$$S^3[D^3 G_p]_{(x_1)} + \frac{\Sigma \otimes x_1 (\Sigma \otimes x_1 - 1)}{2} \otimes (C_2 \times o^2) \text{ et}$$

$$G_p(x_1) = S^3[D^3 G_p]_{(x_1)} + C_0 + C_1 \times x_1 + C_2 \times B_{x_1}^2 = \dots = S^p[F \times o^p]_{(x_1)} + C_0 + C_1 \times x_1 + \dots C_{p-1} \times B_{x_1}^{p-1}. \quad \square$$

Définition 3.22 *On appelle primitive p -ième de la fonction F , toute solution de l'équation différentielle d'ordre p , $D^p G(x) = F(x) \times o^p$, où F est une fonction quelconque de \mathbb{R}_0 dans \mathbb{R}_0 (cf. **Remarque 3.16**).*

Il reste à donner la formule directe de $G_p(x_1)$ en fonction de x_1 pour montrer que son prolongement sur \mathbb{R}_o est régulier lorsque F est régulière.

Lemme 3.23 *On sait calculer tous les coefficients $a_{m,l}^{(p)}$ de $q_m^{(p)}(x) = \sum_{1 \leq l \leq m+p} a_{m,l}^{(p)} \cdot [x^l \times o^{m+p-l}]$, primitive p -ième de la*

fonction p_m qui satisfait aux conditions initiales $D^k q_m^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leq k < p$.

Preuve : 1) on trouve tout d'abord une relation portant sur les $a_{m,l}^{(p)}$ en Analyse Standard (cf. le **Lemme 3.6**).

On a $Q_m^{(p)} = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l}^{(p)} P_l$ avec $a_{m,m+p}^{(p)} = \frac{m!}{(m+p)!}$.

Donc $\Delta Q_m^{(p)} = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l}^{(p)} \sum_{0 \leq k \leq l-1} C_l^k P_k = \sum_{1 \leq l \leq m+1} a_{m,l}^{(p)} \sum_{1 \leq k \leq m+p} C_l^{k-1} P_{k-1}$

avec $C_l^k = 0$ dès que $k \geq l$ (ici, $C_l^l = 0$). On s'arrange pour que tous les indices varient entre 1 et $m+p$.

Alors $\Delta Q_m^{(p)} = \sum_{1 \leq k \leq m+p} b_{m,k-1}^{(p)} P_{k-1}$ avec $[b_{m,k-1}^{(p)}] = (C_l^{k-1})[a_{m,l}^{(p)}]$,

c'est le produit ligne par colonne d'une matrice triangulaire par une colonne.

De même, $\Delta^2 Q_m^{(p)} = \sum_{1 \leq k \leq m+p} b_{m,n-1}^{(p)} \Delta P_{k-1} = \sum_{1 \leq n \leq m+p} c_{m,n-1}^{(p)} P_{n-1}$

avec $[c_{m,n-1}^{(p)}] = (C_{k-1}^{n-1})[b_{m,k-1}^{(p)}]$.

Au final, on trouve que $\Delta^p Q_m^{(p)} = P_m = \sum_{1 \leq n \leq m+p} d_{m,n-1}^{(p)} P_{n-1}$

avec $[d_{m,n-1}^{(p)}] = (C_{k-1}^{n-1})^{p-1} (C_l^{k-1})[a_{m,l}^{(p)}]$.

2) On démontre de même pour $0 \leq s \leq m+p$ que $\Delta^p Q_s^{(p)} = P_s = \sum_{1 \leq n \leq m+p} d_{s,n-1}^{(p)} P_{n-1}$ en posant $a_{s,l} = 0$ dès que $l > s+p$.

On a toujours $[d_{s,n-1}^{(p)}] = (C_{k-1}^{n-1})^{p-1} (C_l^{k-1})[a_{s,l}^{(p)}]$.

3) On écrit toutes ces relations sous la forme du produit matriciel $[P_{s-1}] = (d_{s,n-1}^{(p)})[P_{n-1}]$ et finalement :

$$(a_{s,l}^{(p)}) = [(C_{k-1}^{n-1})^{p-1} \times (C_l^{k-1})]^{-1}.$$

□

Remarque 3.24 On peut calculer par informatique, les premières valeurs de $a_{m,l}^{(p)}$.

Proposition 3.25 L'unique fonction G de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o qui vérifie $D^k G(0) = 0$ pour $0 \leq k < p$ et $D^p G(x) = F(x) \times o^p$ est une série entière, si F est régulière.

Preuve : on sait que $G_p(x_1) = S^p[F \times o^p]_{(x_1)}$. F est régulière

donc $G_p(x_1) = \sum_{m \geq 0} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} \times S^p[p_m \times o^p]_{(x_1)}$ pour $|x_1^S| < R$ et

$R > 0$.

On connaît la primitive p -ième de p_m , notée $q_m^{(p)}$ qui vérifie $D^k q_m^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leq k < p$ et $S^p[p_m \times o^p] = S^p D^p q_m^{(p)} = q_m^{(p)}$.

Donc $G_p(x_1) = \sum_{l \geq 1} \mathcal{A}_l^{(p)} \times x_1^l$ avec $\mathcal{A}_l^{(p)} = \sum_{m \geq \sup(l-p, 0)} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} a_{m,l}^{(p)} \cdot o^{m+p-l}$.

De même pour G . □

Proposition 3.26 Cette série entière est régulière (cf. le **Théorème 3.9**).

4 Le paradis newtonnien et la réhabilitation posthume de G.W.Leibniz

4.1 Introduction à cette étude d'Histonique

A propos de la querelle de priorité qui a séparé l'Angleterre du Vieux Continent sur un siècle et demi, l'opinion de quelques Historiens des Sciences (le plus explicite est Ball [18, p.39-48]) est que G.W.Leibniz a eu connaissance d'une ou plusieurs lettres de I.Newton dès 1675-1676, bien avant donc la publication de ses propres résultats, à partir de 1684. Il se serait donc "inspiré" des idées de fluxions et de fluentes de Newton pour imaginer son propre symbolisme.

On montre dans cette étude d'Histonique jusqu'à quel point ces deux théories sont distinctes lorsqu'on les prolonge sous une forme complète et moderne : la fluxion \dot{x} de Newton *n'est pas* la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de Leibniz, contrairement à ce qu'affirme un peu rapidement N.Bourbaki [10, p. 210]. Leibniz est ainsi réhabilité, il n'a pas copié sur Newton !

On ne rentrera pas ici dans le détail des reconstitutions érudites de la pensée de Newton [19, 20, 21], de Leibniz ou de Varignon [19] sauf quand elles servent d'arguments pour reconstituer ces deux édifices de Mathématiques. Il s'agit seulement ici de fournir une théorie mathématique nouvelle, complète et simple, mais surtout "utile" pour les Mathématiques d'aujourd'hui, inspirée principalement par l'oeuvre différentielle et intégrale de I.Newton. D'une certaine manière c'est Newton qui a réalisé le rêve de Leibniz d'un Calcul Universel [10, p.210].

On montre aussi que l'édifice newtonnien "engendre" mathématiquement celui de Leibniz mais le succès du dernier a fait oublier le premier, chronologiquement et épistémologiquement.

4.2 Deux caractéristiques préalables de l'édifice newtonnien

Pour Newton, ni l'axe temporel ni les axes spatiaux ne sont gradués par des nombres (non standard), mais seulement par des points (cf. Fig. 1). La notation moderne r_t ou $f(t)$ lui est donc étrangère et c'est par une illusion rétrospective volontaire, que l'on va transcrire ses résultats de manière "moderne".

L'exposé moderne de cette théorie mathématique nous oblige à renverser le point de vue qui a été celui de la sous-section 1.2 : au lieu de prolonger les fonctions C^∞ standard sur les coupures infinitésimales, on part de l'idée newtonienne que toutes les fonctions "physiques" (la distinction entre Mathématiques et Physique n'est pas encore faite à cette époque, d'où le titre de son Oeuvre maîtresse) sont NS*-continues à l'intérieur des coupures infinitésimales. On rappelle la définition de cette notion (cf. aussi 1.3).

Définition 4.1 Une fonction de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o est NS*-continue [3] s'il n'est pas possible que

$$|x_2 - x_1| \ll |f(x_2) - f(x_1)|.$$

Ainsi, à l'intérieur d'une coupure infinitésimale d'ordre p , la variation de f est au plus infinitésimale d'ordre q , avec $q \geq p$. On a besoin de cette hypothèse "naturelle" en Physique pour pouvoir définir les variations moyennes.

4.3 Une modernisation du calcul des fluxions de Newton

1 C'est dans les pages 190 à 193 des *Principia* [22] que Newton est allé le plus loin dans l'usage de l'écriture algébrique (cf. Fig. 1) que va privilégier Leibniz (cf. 4.4.2). Partout ailleurs, il utilise les possibilités des dessins pour (se) représenter par des points les instants et par des intervalles les durées infinitésimales (cet effet de loupe des tracés géométriques sera repris par les partisans de l'Analyse non standard de A.Robinson [2]).

Après avoir extrait " $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo^3}{2e^5}$ " (aujourd'hui on écrirait $DI = e - \frac{a}{e} \cdot o - \frac{n^2}{2e^3} \cdot o^2 - \frac{an^2}{2e^5} \cdot o^3$) de $DI^2 = AQ^2 - AD^2$ avec $AQ = n$ et $AD = a + o$, $n^2 - a^2 = e^2$, il nous dit (cf. Fig 1) :

"Le premier terme qui est ici, e, représentera toujours la longueur de l'ordonnée CH qui s'appuie sur le commencement de la quantité indéfinie o... Le quatrième terme détermine la variation de la courbure; le cinquième la variation de la variation, et ainsi de suite" [22, p.192].

Ce qui s'écrit aujourd'hui :

Entre C (d'abscisse $t \in \mathbb{R}$) et D ($t + o$), la variation *moyenne* de la fonction r est \dot{r}_t donné par $Dr_t = r_{t+o} - r_t = \dot{r}_t \cdot o$ (\dot{r}_t est en général un nombre réel non standard). Mais entre D (d'abscisse $t + o$) et E ($t + 2o$), cette variation *varie*.

On considère séparément la valeur précédente (qui se trouve de ce fait "conservée") de sa variation et

$$D\dot{r}_t = \dot{r}_{t+o} - \dot{r}_t = \ddot{r}_t \cdot o, \\ D^2r_t = \dot{r}_{t+o} \cdot o - \dot{r}_t \cdot o = \ddot{r}_t \cdot o^2.$$

Donc, \dot{r} (resp. \ddot{r}) est la variation moyenne d'ordre un (resp. deux) et non pas la dérivée première (resp. seconde).

Newton ne va pas au delà de l'ordre 3. Sautons le pas et écrivons

$$D^k r_t = r_t^{[k]} \cdot o^k$$

avec $\dot{r} = r^{[1]}$ et $\ddot{r} = r^{[2]}$.

2 Newton savait (avec d'autres notations, cf. son Lemme 5 du Livre III) que $r_{t+k \cdot o} = r_t + C_k^1 \cdot Dr_t + C_k^2 \cdot D^2r_t + \dots D^k r_t$. Soit :

$$r_{t+u} = r_t + B_u^1 \times \dot{r}_t + B_u^2 \times \ddot{r}_t + \dots$$

pour n'importe quel $u = k \cdot o$ élément de $[0]_1 \subset \mathbb{R}_o^{1+}$.

Voici la "série formelle" la plus générale à laquelle I.Newton aurait pu parvenir.

3 Nous sommes très loin de la Formule de Taylor (compatriote de Newton qui s'est en fait "inspiré" des résultats de Leibniz selon N.Bourbaki [10, p.209]).

Une manière moderne de faire ce "passage" (qui n'est pas un "passage à la limite") de l'édifice *discret* newtonien à l'édifice *continu* leibnizien, consiste à réorganiser les termes de la formule précédente en fonction des puissances de u et l'on trouve

$$r_{t+u} = r_t + (\dot{r}_t + -\frac{1}{2}\ddot{r}_t \times o + \frac{1}{3}r_t^{[3]} \cdot o^2 \dots) \times u \\ + \frac{1}{2}(\ddot{r}_t - r_t^{[3]} \times o^2 + \frac{11}{12}r_t^{[4]} \times o^2 \dots) \times u^2 + \frac{1}{6}(r_t^{[3]} - \frac{3}{2}r_t^{[4]} \times o \dots) \times u^3 + \dots$$

Mais l'on ne sait plus, dans cette reconstitution mathématique de l'édifice newtonien que r_t est, au sens moderne, indéfiniment dérivable.

4 Comment alors sauter ce nouveau pas, qui sépare Newton de Leibniz ?

On note a_n les termes entre les parenthèses et $r_{t+u} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a_n \times u^n$ pour tous les

éléments infinitésimaux u de \mathbb{R}_o^{1+} . Cette série formelle "converge" toujours dans \mathbb{R}_o , par définition. On appelle *analytiques* les séries qui convergent en dehors de $[0]_1$ dans l'ensemble \mathbb{R}_o^+ et l'on écrit

$$r_{t+T} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a_n \times T^n$$

pour $|T| < R$ et $R \in \mathbb{R}^{+*}$.

La démonstration que cette fonction de la variable non standard T est infiniment "différentiable" et même régulière, a été faite au **Théorème 3.9**. Alors $a_n = r^{(n)}(t)$ et $r^{(p)}(t+T) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a_{n+p} T^n$ (cf. le **Corollaire 3.10**). C'est le point maximal

qu'aurait pu atteindre Leibniz s'il avait pu définir rigoureusement le symbole $\frac{dy}{dx}$ (cf. 4.7).

5 Le premier résultat de cette étude d'Histoire est d'avoir clarifier la différence d'approche entre ces deux initiateurs du Calcul Infinitésimal : approche *discrète* par pas de o pour Newton, approche de la *continuité* et de la dérivabilité standard pour Leibniz ; variations moyennes $r^{[k]}$ d'un côté, variations instantanées ou locales $r^{(k)}$ d'un autre.

On peut ainsi jeter aux oubliettes de l'Histoire la querelle de priorité de cette immense découverte mathématique.

6 Les formules qui permettent de passer des valeurs moyennes aux dérivées sont les mêmes que celles des Propositions 1.29 et 1.31 :

$$F^{[p]}(x_1) = \sum_{n \geq p} X_p^n \frac{F^{(n)}(x_1)}{n!} \text{ avec } X_p^n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^n \text{ et}$$

$$\frac{F^{(n)}(x_1)}{n!} = \sum_{p \geq n} (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} \frac{F^{[p]}(x_1)}{p!} o^{p-n} \text{ avec } A_k^p = \sum_{n=1}^p (-1)^{p-n} K_{p-1}^{p-n} k^n.$$

4.4 Une comparaison des oeuvres de Newton et Leibniz

1 Leibniz est réhabilité mais son édifice ressemble beaucoup plus à l'immeuble moderne du Calcul des Variations en Analyse Standard. L'édifice newtonien est pour nous aujourd'hui beaucoup plus original et simple puisque la variation moyenne sur un intervalle d'amplitude infinitésimale permet d'éviter la question du "passage à la limite" qui ne sera vraiment résolue qu'avec D'Alembert, au prix du formalisme des ϵ et des η .

2 Leibniz fait beaucoup moins de dessins que Newton dans ses articles sur le Nouveau Calcul et l'on pourrait presque s'en passer. Toute l'explication est portée par l'écriture algébrique et l'on peut dire que Leibniz est pour une *Analyse analytique* alors que Newton est pour *Analyse synthétique* si l'on reprend les termes de l'épisode Poncelet en Géométrie [23, 24].

Mais il utilise parfois des notations assez lourdes pour nous aujourd'hui car, pour lui, toute quantité est positive alors que sa variation instantanée peut être bien sûr positive ou négative. Il écrit donc $\pm dy$ ce que nous écrivons dy et $\mp dy$ son opposé.

3 En modernisant son propos, on comprend qu'il a laissé à ses successeurs le soin de définir soigneusement sa notation infinitésimale. Il se contente de dire qu'il cherche "la valeur de $dx : dy$ c'est-à-dire celle du rapport de dx à dy " [19, p. 192].

On écrira ici seulement $dy = y'_x dx$ car dx n'est pas inversible dans \mathbb{R}_o . Leibniz a finalement bénéficié d'une facilité de notation ($dx = \frac{dx}{dy} dy$) qui lui permet d'écrire $dx^a = a \cdot x^{a-1} dx$ ou $d \frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$ [19, p.180 ou 190].

4 En dehors de quelques formules très générales et audacieuses [10] comme " $d^2 = dd$ " (et même " $d^{-1} = \int$ " qu'il écrit aussi " $d \int x$ aeq. x " et qui va devenir le Théorème Fondamental de l'Analyse), c'est P.Varignon essentiellement qui s'est le premier occupé du maniement des différentielles secondes d^2 , dans un contexte cinématique.

M.Blais, spécialiste français de ce mathématicien français souligne en des termes très mesurés, une ambiguïté de son oeuvre qui reprend les termes de la distinction discret/continu mais en inversant curieusement les destinataires (cf. 4.3.5) :

"les difficultés de la conceptualisation varignonienne résident principalement dans le fait que l'expression de l'accroissement de vitesse dv et celle de la force y impliquent si nous pouvons nous exprimer ainsi, une modélisation ambiguë du mode d'action de la force, en ce sens que celle-ci est censée agir... soit au tout premier instant... soit de façon constante et continue pendant tout l'intervalle de temps dt " [19, p.206-7].

Cela peut s'exprimer mathématiquement ainsi :

Selon une conception *discontinuiste* ("une force agit instantanément au début de cet intervalle de temps dt puis n'agit plus jusqu'au début de l'intervalle de temps suivant" [19, p.206]) de la force, la variation de vitesse est instantanée : $v_{t_0^+} = v_{t_0}$ et $v_{t_0^-} = v_{t_0} + y \cdot o$. Donc $dv = y \cdot dt$ et la variation d'espace due à cette variation de

vitesse est $d^2x = dv \cdot dt = y \cdot dt^2$.

Selon la conception *continuiste* de Newton ("la force agirait effectivement continuellement et de façon constante pendant l'intervalle de temps dt , de telle sorte que l'accroissement de vitesse acquis à la fin de cet intervalle de temps soit encore dv " [19, p.206]), "l'espace parcouru ne serait plus ddx mais $\frac{1}{2}ddx$ " nous dit Michel Blay.

Remarque 4.2 Newton s'intéresse à la variation moyenne d'une fluente continue (et même infiniment dérivable puisque c'est une série entière convergente) par pas de temps discrets infinitésimaux (le plus souvent, o). Leibniz s'intéresse à la variation instantanée d'une quantité variable mais uniquement en ses valeurs standard.

C'est pourquoi les deux peuvent être dit discontinuistes et continuistes selon que l'adjectif porte sur les propriétés des fonctions ou des ensembles de nombres (\mathbb{R} et \mathbb{R}_o^1 sont discontinus dans \mathbb{R}_o en un sens qui sera précisé en 5.4).

5 On voit à quel point les deux interprétations précédentes de l'accélération sont incompatibles mais seule l'interprétation continuiste est "physiquement" juste car, pour Newton, la force ne peut sortir du néant. Il ne peut y avoir de discontinuité dans les phénomènes spatiaux-temporels, même dans les coupures infinitésimales secondes.

Newton nous le dit, dans le Lemme X, Livre I, Section I des *Principia* :

"Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'on presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps" [22].

Même dans le cas simple où l'accélération est "immuable", elle n'est pas *éternelle*, elle a un début et une fin et des solutions de raccordement par continuité aux deux extrémités. C'est l'hypothèse de la N.S*-continuité.

6 En résumé, la Théorie de Leibniz paraît beaucoup moins assurée dans ses fondations que celle de Newton. C'est pourtant elle qui a gagné au verdict de l'Histoire.

4.5 La Théorie de l'Intégration de I.Newton

1 C'est cette Théorie qui a été développée ici sous une forme moderne et complète mais en fait, Newton en est bien loin.

Dans le contexte cinématique des *Principia*, Newton montre qu'il est bien conscient de ce que le mouvement n'est que la somme infinie des déplacements infinitésimaux, ce qu'il exprime en ces termes :

"Si d'un nombre égal de particules on compose des temps quelconques égaux [finis], les vitesses au commencement de ces temps seront comme les termes d'une progression continue pris par sauts, en augmentant un nombre égal de termes intermédiaires... Maintenant, soient diminuées ces particules égales de temps [jusqu'à devenir infiniment petites], et soit leur nombre augmenté à l'infini, de sorte que l'impulsion de la résistance devienne continue ; et les vitesses qui sont toujours en proportion continue dans les commencements des temps égaux le seront encore dans ce cas" [22, p.175].

On lira avec intérêt la modernisation de la résolution par Newton du problème de la résistance lorsqu'elle est proportionnelle à la vitesse dans [19, p.166-7].

2 Dans son *Traité des Fluxions* (cf. Fig. 2), il établit au Problème IX comment "Trouver l'Aire d'une Courbe proposée quelconque" et précise au Problème VII "concevez que les Aires ACEB et ADB sont produites par le Mouvement des droites BD et BE le long de la ligne AB" [6, p.86].

Si z_t désigne l'Aire ADB et $x_t = t$ celle du rectangle de côté $AC = 1$, on a $\dot{x}_t = 1$ et $Dz_t = \dot{z}_t \cdot o$ où \dot{z}_t représente toujours la variation moyenne de l'aire entre t et $t + o$. Alors, Newton dit simplement "par la relation donnée des Fluxions, on trouve celle des Fluents" [6, p.93].

A titre d'exemple un peu compliqué (c'est l'Exemple 5), on montre comment Newton cherche z en fonction de x lorsque $\dot{z}^3 + a^2\dot{z} + ax\dot{z} - 2a^3 - x^3 = 0$.

Newton sait que z est une série de puissances de x (ou analytique), il cherche le terme constant a puis remplace \dot{z} par $a + px$, trouve $p = \frac{-1}{a}$, remplace \dot{z} par $a - \frac{1}{a}x + px^2$, trouve $p = \frac{1}{64a}$, etc...

3 Newton est ainsi capable de trouver les premiers termes de toutes les fonctions z telles que \dot{z} soit une fonction algébrique de x mais il ne peut reconnaître les fonctions transcendentes Log, Arctg... Il ne peut que donner les valeurs approchées des aires sans se préoccuper si la série formelle est ou non convergente en dehors de la coupure infinitésimale.

Par différence, on a donné en 3.1 les valeurs exactes (non standard) de toutes les sommes "intégrales" des valeurs prises par une fonction $\bar{f} \times o$ aux valeurs successives de $[[0, t[[_1 \subset \mathbb{R}_o^{1+}$, même si on ne sait pas le plus souvent en calculer la partie standard.

4.6 Aux limites de l'édifice newtonien

On va répondre maintenant à une question plus "difficile" que s'est peut-être déjà posée le lecteur :

Pourquoi cette Théorie Non Standard* de l'Intégration a-t-elle été restreinte en 3.2 et 3.3 aux seules fonctions régulières de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o (que l'on peut aussi nommer "newtoniennes") ?

1 Il est possible de définir par induction dans \mathbb{R}_o^{1+} , une somme "intégrale" $G(x_1) = S[F \times o]_{(x_1)}$ pour une fonction F *quelconque* de \mathbb{R}_o dans \mathbb{R}_o mais il faut compter avec la forme indéterminée $\infty \times 0$ comme va le montrer maintenant. Si $F = 0$, toutes les fonctions H qui sont constantes sur chaque coupure infinitésimale, vérifient $DH(x_1) = 0$ et

$$\sum_{y_L \in [[0, x_1[[_1} 0 = \sum_{y_L \in [[0, x_1[[_1} DH(y_L) = H(x_1) - H(0).$$

2 Cette somme *intégrale* G est donc définie à une fonction H près telle que $H(x_1) = H(x_1^S)$, traduction du fait qu'on n'en connaît que les différences premières.

C'est encore pire avec les sommes multiples car $S^k[F \times o^k]_{(x_1)} = G(x_1) + a_1(x_1^S)x_1 + a_2(x_1^S)x_1^2 + \dots + a_k(x_1^S)x_1^k$, où les fonctions de x_1^S à valeurs dans \mathbb{R}_o sont quelconques, traduction cette fois du fait qu'on ne connaît de cette fonction que ses différences k -ièmes.

3 C'est pour éviter cette indétermination de la somme intégrale que l'on s'est limité aux seules fonctions newtoniennes. En effet, si $DH(x) = 0$ partout, alors H est une fonction constante (cf. le **Lemme**) et $S[0]_{(x_1)} = H(x_1) - H(0) = 0$.

Lemme 4.3 *Si H est régulière en t_0 et $DH = 0$ sur $]t_0 - R, t_0 + R[$ alors H est constante.*

Preuve : H est "différentiable" en $t_0 + x$, $|x_S| < R$ donc $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*}) |DH(t_0 + x) - H'(t_0 + x) \times o| < \varepsilon \times o$ et $H'(t_0 + x) = 0$. De même, on démontre par récurrence sur $p \geq 1$ que $H^{(p)}(t_0 + x) = 0$ et $H(t_0 + x) = H(t_0) + H'(t_0) \times x + \dots = H(t_0)$.

La variation globale d'une fonction est alors la somme intégrale de ses variations infinitésimales (cf. la citation précédente de I. Newton).

4 Une autre justification de cette limitation volontaire de l'édifice newtonien peut être donnée : d'un point de vue physique, tous les mouvements spatiaux-temporels sont "newtonniens" (cf. 4.6.1 et 4.4.5).

Il faut rappeler que, dans un contexte cinématique, un objet quelconque ne peut changer de place de manière instantanée, ni même sur une durée infinitésimale car toute vitesse moyenne doit rester finie.

De même, si la vitesse semble changer de signe ou d'intensité à l'instant d'un choc, des forces de contact dont l'intensité varie de diverses manières en fonction de la vitesse, interviennent sur une durée infime mais finie (non infinitésimale).

Enfin, une accélération constante apparaît toujours de manière progressive.

Tous les "monstres" de l'Analyse Standard peuvent être ignorés en Analyse Non Standard* car une fonction numérique discontinue (prolongée par des constantes dans les coupures infinitésimales) n'est pas NS*-continue. Toutes les fonctions non standard considérées ici sont au moins infiniment "différentiables" dans la topologie d'ordre de \mathbb{R}_o .

4.7 Les faiblesses de l'édifice Leibnizien

1 En se limitant au calcul des valeurs standard des dérivées, Leibniz a de fait éliminé du domaine des nombres, les éléments infinitésimaux. Ils ne sont plus que des auxiliaires de calcul appelés à disparaître à la fin. C'est la même situation qu'ont connu un temps les nombres imaginaires [25].

Deux attitudes sont alors possibles :

Avec d'Alembert puis Cauchy, on élimine de manière habile de l'approche initiale de Leibniz ces éléments fantômes. Toute l'Analyse Standard s'est construite sur ce refus des nombres infiniment petits et Leibniz en est déjà en partie responsable.

Avec Newton, on considère les nombres infinitésimaux comme autant réels que les nombres standard et on apprend à calculer avec, ce que nous avons fait dans cet article (cf. aussi [5]).

2 Il y a un enjeu de taille derrière ce choix d'accepter ou non les nombres réels infiniment petits et les nombres entiers infiniment grands :

Si la vitesse et l'accélération ne sont définies que pour les parties standard du temps, elles ne semblent plus agir que ponctuellement, par à-coups, à chaque coupure infinitésimale. Cette action *discontinue* devient incompréhensible du point de vue physique (cf. 4.4.4) mais elle est sans conséquence puisque les éléments non standard de la droite numérique ont disparu.

Ainsi la Force, mais aussi tous les concepts que les Physiciens ont inventé depuis (le Travail, le Flux, etc...) sont définis sur la droite numérique *standard*, ils paraissent "continus" et même infiniment "dérivables" en fonction du Temps, mais leurs modes d'action sont devenus incompréhensibles.

3 Le lien *réel* des concepts physiques avec l'Espace-Temps-Masse a été irrémédiablement perdu. Pour le rétablir, un retour à Newton s'impose et une première tentative de Physique Non Standard* est proposée dans un article bientôt déposé sous ArchiV D.S. [5]. Il propose une première compréhension du "mode d'action" de l'interaction de gravitation à partir de sa première formalisation mathématique, faite par I.Newton, il y a trois siècles et demi.

En faisant un clin d'oeil à K.Marx, on peut dire que "les Physiciens ont réussi à transformer le Monde, il s'agit maintenant de le comprendre".

4.8 La Théorie de l'Intégration de G.W.Leibniz

Cette grande efficacité des algorithmes de calcul de l'Analyse leibnizienne associée à une complète perte de "sens" se retrouve à l'identique dans la Théorie de l'Intégration de G.W.Leibniz. Un exemple détaillé peut suffire à le montrer.

1 Afin de calculer l'aire du premier quadrant d'un disque unité, Leibniz utilise la sous-tangente, c'est-à-dire le point d'intersection T de la tangente en M au cercle avec l'axe des y (cf. Fig. 3).

La considération des triangles conduit à $\frac{y-z}{x} = \frac{1-x}{y}$, l'équation du cercle à $dy = \frac{1-x}{y} dx$. L'aire I est égale à $1 - \int_{x=0}^{x=1} x dy$. Par changement de variable

$$1 - I = \int_{y=0}^{y=1} \frac{x(1-x)}{y} dx = \int_{y=0}^{y=1} y dx - \int_{z=0}^{z=1} z dx = I - \int_{z=0}^{z=1} z dx.$$

Donc $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z=1} z dx$. Une intégration par parties donne $I = 1 - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} x dz$.

Les équations précédentes donnent $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$ que Leibniz développe en une série de puissances ($x = 2z^2 - 2z^4 + 2z^6 \dots$) et intègre terme à terme. Il obtient ainsi une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$, ici $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

2 On retrouve ici la puissance des algorithmes de calcul mais aussi la complète perte de sens. Comme pour les différentielles et la différence (cf. 4.4.3.), le lien entre intégrale et somme infinie de termes infinitésimaux est perdu.

L'idée de différence a disparu. L'idée de somme a disparu aussi. Il ne reste plus chez Leibniz que la dérivée et la primitive (antidérivée) considérées comme deux opérateurs fonctionnels réciproques.

4.9 Conclusion de cette étude d'Histonique

Après ce long détour par l'Histoire des Sciences, il semble établi que l'Analyse standard mais aussi la Physique Mathématique élémentaire souffrent de la perte d'une certaine "intuition" : les calculs se font bien sûr rigoureusement mais les liens entre différentielle et différence finie, intégrale et somme finie, entre concepts de Physique et Espace-Temps-Masse "réel" [5] sont irrémédiablement perdus.

Bien sûr, un sens "analytique" est venu combler, avec le succès que l'on connaît, ce manque mais si l'on veut restaurer ces liens plus primitifs, le chemin à suivre est tout tracé : il faut considérer à nouveau les éléments de \mathbb{R}_o comme aussi "réels" que ceux de \mathbb{R} et les éléments de $\mathbb{N}[\Sigma]$ ou \mathbb{N}^+ comme des entiers tout autant "naturels" que ceux de \mathbb{N} . Alors tout se passera comme si les pas de temps (dt , o , u) et les intégrales étaient des différences et des sommes finies.

Notre intuition élémentaire de l'Analyse discrète (cf. le **Lemme 1.23** et le **Lemme 3.2**) pourra alors s'étendre de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

Ce projet devient réalisable car \mathbb{R}_o possède toutes les propriétés nécessaires pour définir la différentielle comme une différence et \mathbb{N}^+ possède toutes les propriétés nécessaires pour définir l'intégrale comme la somme d'un nombre défini de termes : \mathbb{R}_o est une algèbre (mais ce n'est pas un corps) topologique ; \mathbb{N}^+ est un modèle non standard de l'arithmétique de Peano et un semi-groupe additif.

On peut préciser qu'il est possible de définir de bien d'autres manières une extension infinitésimale de \mathbb{R} et une extension infinie-définie de \mathbb{N} .

Dans l'article [5], le symbole infinitésimal est noté o_3 . C'est un élément nilpotent (car $o_3^3 = 0$) de l'Algèbre de Weil $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}[Y]/(Y^3)$ [26]. Cette algèbre totalement ordonnée est très différente de celle étudiée ici puisque \mathbb{R}_o ne possède pas d'éléments nilpotents.

Remarque 4.4 *Seul $\mathbb{R}_o = \mathbb{R}[[X]]$ est intrinsèque, c'est sa propriété spécifique importante. Il existe donc des nombres infiniment petits qui ne sont pas nilpotents [25].*

Si l'on veut comparer o et o_3 , il faut les plonger dans la sur-structure algébrique et ordinale $\mathbb{R}[[X, Y]]/(Y^3)$. La seule façon de prolonger la relation d'ordre total sur $\mathbb{R}[[X]]$ et $\mathbb{R}[Y]/(Y^3)$ est de poser $0 < o_3^2 \ll o_3 \ll o \ll 1$: les éléments nilpotents d'ordre 3 ($a \cdot o_3 + b \cdot o_3^2$ avec $a \neq 0$) ou 2 ($b \cdot o_3^2$ avec $b \neq 0$) sont tous infiniment plus petits que tous les éléments infinitésimaux de \mathbb{R}_o .

Dans la correspondance de Leibniz, on trouve cette courte justification des nombres non standard :

"Je suppose qu'il existe des quantités qui sont incomparablement plus grandes ou plus petites que d'autres"

Pour rendre réel ce rêve mathématique, il suffit de trouver une sur-structure algébrique et ordinale de \mathbb{R}_o et de \mathbb{N} . Cela sera fait au tout début de la section 5, avec le corps totalement ordonné $(\Omega, +, \times, \leq)$.

Remarque 4.5 *Dans le débat historique entre Nieuwentijt et Leibniz [26], il n'y a aucun vainqueur puisque, sans le savoir bien sûr, ils ne parlaient pas de la même structure : l'espace des nombres réels de G.W. Leibniz pourrait s'apparenter à la structure de Ω alors que l'espace numérique de Nieuwentijt pourrait être "simplement" \mathbb{R}_2 .*

5 Principaux résultats sur les ensembles de nombres

- 5.1. Les extensions intrinsèques les plus simples de \mathbb{N} et \mathbb{R} .
- 5.2. Propriétés du corps totalement ordonné $(\Omega, +, \times, \leq)$.
- 5.3. Propriétés de l'algèbre totalement ordonnée $(\Omega, +, \cdot, \times, \leq)$.
- 5.4. Propriétés ordinales de (Ω, \leq) et de $(\overline{\Omega}, \leq)$.
- 5.5. Une nouvelle caractérisation des structures $(\Omega, +, \times, \leq)$ et $(\overline{\Omega}, \leq)$.

5.1 Les extensions intrinsèques les plus simples de \mathbb{N} et \mathbb{R}

Théorème 5.1 $\mathbb{R}[[X]] = \{ \sum_{k \geq 0} a_k X^k / a_k \in \mathbb{R} \}$ muni des lois usuelles et de l'ordre lexicographique tel que $0 < X \ll 1$, est une algèbre intègre totalement ordonnée, notée $(\mathbb{R}_o, +, \cdot, \times, \leq)$.

Preuve : cf. la **Proposition 1.4**. \square

Proposition 5.2 $(\mathbb{R}_o, +, \cdot)$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie d'ordre.

Preuve : on montre comme en Analyse standard, que la loi interne et la loi externe sont toutes les deux continues pour cette topologie. \square

Théorème 5.3 $\mathbb{N} = \{ \sum_{0 \leq k \leq N} a_k Y^k / (N \in \mathbb{N}, a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{R}) \}$ muni de l'ordre lexicographique tel que $1 \ll Y$ et des lois adéquates, est un anneau commutatif unitaire et intègre, totalement ordonné, d'entiers tous définis à l'unité près.

Preuve : cf. la **Proposition 2.9**. On a ainsi facilement tous les nombres entiers négatifs, ils ont les mêmes propriétés que les nombres positifs. \square

Proposition 5.4 (\mathbb{N}^+, S) est un modèle non standard de l'Arithmétique de Peano qui prolonge d'une manière intrinsèque l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Preuve : c'est une formulation équivalente au fait que \mathbb{N}^+ est le prolongement inductif des ensembles \mathbb{N} et $\mathbb{N}[\Sigma]$ pour l'application S . Il ne dépend d'aucun choix arbitraire. \square

Théorème 5.5 $\Omega = \{ \sum_{k \leq N} a_k Z^k / N \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{R}, a_N \neq 0 \} \cup \{0\}$ muni des lois usuelles $+$, \times et de l'ordre lexicographique tel que $1 \ll Z$, est un corps totalement ordonné, archimédien pour le prolongement intrinsèque de \mathbb{N} .

Preuve : $\mathbb{N} \subset \Omega$ pour $Y = Z = \Sigma$, $0 \leq k$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}[[X]] \subset \Omega$ pour $X = Z^{-1} = o$, $N \leq 0$.

Un élément non nul quelconque de Ω s'écrit $x = a_N \Sigma^N + a_{N-1} \Sigma^{N-1} + \dots + a_{-n} o^n + \dots = a_N \Sigma^N (1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} o + \dots + \frac{a_{-n}}{a_N} o^{N+n} + \dots) = a_N \Sigma^N (1 + u)$, avec $u \in \mathbb{R}_o$ et $|u| \ll 1$.

Son inverse est $\frac{1}{a_N} o^N (1 - u + u^2 \dots (-1)^n u^n + \dots) \in \mathbb{R}_o$ si $N \geq 0$ et $\frac{1}{a_N} \Sigma^{-N} (1 - u + u^2 \dots (-1)^n u^n + \dots) \in \Omega$ si $-N \geq 0$ (cf. le **Corollaire 1.9**).

Soient $a \in \Omega^{*+}$ et $b \in \Omega$ avec $0 < a < |b|$.

On divise b par a et $x = \frac{b}{a} \in \Omega$. On appelle *troncature entière* de $x = \sum_{k \leq N} c_k Z^k$, le nombre entier $L = [x] = \sum_{k \leq N} d_k Z^k$ avec $d_k = 0$ si $k < 0$, $d_0 = [c_0]$, partie entière de c_0 et $d_k = c_k$ si $k > 0$.

Par l'ordre lexicographique, $L \leq x < L + 1$ et $La \leq b < (L + 1)a$. Il y a toujours un multiple de a qui dépasse le nombre b . \square

5.2 Propriétés du corps totalement ordonné $(\Omega, +, \times, \leq)$

Remarque 5.6 *L'ensemble Ω n'est ni valué, ni uniforme puisque $|y - x| \in \Omega^+$*

or certains traités de N.Bourbaki [10, 27, 28] sont écrits pour un corps de scalaires K normé, le plus souvent \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Le premier volume de Topologie [29] et la première moitié du second [30] visent par contre explicitement à "se débarrasser des nombres réels" ([29], p.8) standard. Ils peuvent donc être ici utilisés.

Proposition 5.7 $(\mathbb{R}_o, +, \times)$ est un anneau topologique [30].

Preuve : la preuve de la compatibilité de l'addition avec la topologie d'ordre est classique. On sait que la compatibilité de la multiplication est équivalente aux deux axiomes (AT_{IIIa}) et (AT_{IIIb}) de [29, p.75]. (AT_{IIIa}) donne

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_o^{+*})(\forall x, y \in \mathbb{R}_o) |x| < \eta_1, |y| < \eta_2 \implies |xy| < \varepsilon.$$

On prend $0 < o^{2n} < \varepsilon$ et $\eta_1 = \eta_2 = o^n$. (AT_{IIIb}) donne

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*})(\forall x \in \mathbb{R}_o) |x| < \eta \implies |x_0 x| < \varepsilon.$$

Si $x_0^S \neq 0$, on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{|x_0|}$. Sinon, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$. \square

Proposition 5.8 $(\Omega, +, \times)$ est un corps topologique [30].

Preuve : on sait déjà que Ω est un corps (cf. le **Théorème 5.5**). La continuité étant une propriété locale, la preuve que $(\Omega, +, \times)$ est un anneau topologique est la même que précédemment. Il faut vérifier l'axiome (KT) de [30, p.83]. Soit, pour $x_0 \neq 0$,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists \eta \in \mathbb{R}_o^{+*})(\forall x \in \mathbb{R}_o) |x_0| < \eta \implies \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

On prend $\eta = \inf(\varepsilon \frac{x_0^2}{2}, \frac{|x_0|}{2})$, alors $|x| > \frac{|x_0|}{2}$ et $\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|} < \frac{2\eta}{x_0^2} < \varepsilon$ même si $x_0 = u$ est infinitésimal car $u \neq 0$ est inversible. \square

Remarque 5.9 *N.Bourbaki reconnaît dans la Note historique de [30, p.223] que la droite numérique standard est obtenue par lui par la complétion du groupe additif \mathbb{Q} faite pour la première fois par Cantor en 1872 (... et Meray en 1869 [7, p.245]) et non pas par la méthode des coupures de Dedekind. La première est classiquement faite dans un espace métrique ou seulement uniforme (cf. la **Remarque 5.6**) mais une structure d'anneau totalement ordonnée suffit.*

La seconde n'exige aucune structure algébrique, une relation d'ordre total suffit pour définir la continuité d'un ensemble (cf. 5.4.).

5.3 Propriétés de l'algèbre totalement ordonnée $(\Omega, +, \cdot, \times, \leq)$

Définition 5.10 *Dans l'anneau \mathbb{R}_o muni de sa topologie d'ordre, une suite d'éléments est une suite de Cauchy ssi*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists N > 0)(\forall p \geq N)(\forall q \geq N) - \varepsilon < u_p - u_q < \varepsilon.$$

Proposition 5.11 *$(\mathbb{R}_o, +, \cdot, \times, \leq)$ est complet dans sa topologie d'ordre, i.e. toute suite de Cauchy d'éléments de \mathbb{R}_o est convergente dans Ω [31, p.5].*

Preuve : soit une suite de Cauchy dans \mathbb{R}_o . Alors

$$(\forall n > 0)(\exists N_n > 0)(\forall p > N_n) u_{N_n} - o^n < u_p < u_{N_n} + o^n.$$

Ses n premiers moments sont constants à partir du rang N_n . La suite $(u_{N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers un nombre unique $l \in \mathbb{R}_o$ et

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_o^{+*})(\exists N_n > 0)(\forall p > N_n) |u_p - l| < o^{n-1} < \varepsilon.$$

\square

Proposition 5.12 *$(\Omega, +, \cdot, \times, \leq)$ est complet dans sa topologie d'ordre.*

Preuve identique.

Remarque 5.13 *\mathbb{R}_o et Ω sont munis d'un "produit scalaire" qui vérifie toutes les propriétés d'un produit scalaire standard, c'est le simple produit interne. On dira que ce sont des "Espaces de Hilbert" mais ce ne sont pas des Espaces de Hilbert.*

5.4 Propriétés ordinales de (Ω, \leq) et de $(\overline{\Omega}, \leq)$

On montre que \mathbb{R} n'est pas continu (au sens de Dedekind [31]) dans l'ensemble \mathbb{R}_o . On cite tout d'abord R.Dedekind :

Mais en quoi consiste exactement cette continuité? Tout tient dans la réponse à cette question, et c'est par elle seule que l'on obtiendra **un fondement scientifique pour l'investigation de tous les domaines continus**.

Je trouve l'essence de la continuité... dans le principe suivant :

"Si tous les points de la droite se divisent en deux classes telles que tout point de la première classe se situe à gauche de tout point de la deuxième, alors il existe un et un seul point qui produit cette répartition de tous les points en deux classes, cette coupure de la droite en deux parties" [32, p.19-20].

Cela peut se formaliser de la manière suivante.

Définition 5.14 \mathbb{E} est un ensemble totalement ordonné. On dit que (C_g, C_d) est une coupure de \mathbb{E} ssi

$$C_g \cup C_d = \mathbb{E} \text{ et } (\forall x \in C_g)(\forall x' \in C_d) x \leq x'.$$

Remarque 5.15 On voit plus loin pourquoi on permet aux deux parties de la coupure d'avoir un élément en commun. Mais ce n'est pas une obligation (sinon, la propriété serait triviale).

Définition 5.16 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$ sont deux ensembles totalement ordonnés. \mathbb{E} est continu dans \mathbb{F} ssi, quelle que soit la coupure (C_g, C_d) de \mathbb{E} , il existe toujours un seul $z \in \mathbb{F}$ tel que

$$(\forall x \in C_g)(\forall x' \in C_d) x \leq z \leq x'.$$

\mathbb{E} est continu (discontinu) ssi il est (n'est pas) continu dans lui-même.

Remarque 5.17 D'après la définition précédente, R.Dedekind démontre dans [32] que \mathbb{Q} est discontinu mais continu dans \mathbb{R} et que \mathbb{R} est continu.

Proposition 5.18 \mathbb{R} n'est pas continu dans l'ensemble \mathbb{R}_o . Il est discret dans la topologie d'ordre de \mathbb{R}_o .

Preuve : toute une coupure infinitésimale vient s'intercaler entre les deux parties d'une coupure de Dedekind de la droite numérique \mathbb{R} standard et $(\forall t \in \mathbb{R})]t - o; t + o[\cap \mathbb{R} = \{t\}$. \square

On met en relation la continuité avec deux autres propriétés bien connues, la densité et le Théorème de Bolzano.

Définition 5.19 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$ sont deux ensembles totalement ordonnés. \mathbb{E} est dense dans \mathbb{F} ssi

$$(\forall x, y \in \mathbb{F})(\exists z \in \mathbb{E}) x < y \Rightarrow x < z < y.$$

\mathbb{E} est dense ssi il est dense dans lui-même.

Lemme 5.20 (\mathbb{E}, \leq) totalement ordonné. \mathbb{E} est continu ssi il vérifie le Théorème de Bolzano et il est dense.

Preuve : 1) Soit E un ensemble dense vérifiant, si $X \subset \mathbb{E}$ est majoré (resp. minoré), alors X est borné supérieurement (resp. inférieurement).

Soit (C_g, C_d) une coupure de \mathbb{E} , C_g (resp. C_d) est majoré (resp. minoré) donc borné par b_g (resp. b_d). On a $b_g \leq b_d$. Si $b_g < b_d$, la condition $C_g \cup C_d = \mathbb{E}$ n'est plus satisfaite du fait de la densité de \mathbb{E} , donc $b = b_g = b_d$. Par conséquent,

$$(\forall x \in C_g)(\forall y \in C_d) x \leq b \leq y.$$

2) Réciproquement, si (\mathbb{E}, \leq) est continu et si $X \subset \mathbb{E}$ est majoré. On montre que $C_g = \{x_g \in \mathbb{E} / (\exists x \in X) x_g \leq x\}$ et $C_d = \{x_d \in \mathbb{E} / (\forall x \in X) x < x_d\}$ forment une coupure de \mathbb{E} : $C_g \cup C_d = \mathbb{E}$; soit $x_g \in C_g$, $(\exists x \in X) x_g \leq x$ et $(\forall x_d \in C_d) x < x_d$ (la deuxième condition est satisfaite). Il existe donc x_0 unique plus petit des majorants de X et X est borné supérieurement.

\mathbb{E} est dense car si ce n'était pas le cas, il existerait $x_0 < y_0$ tels que $]x_0, y_0[\cap \mathbb{E} = \emptyset$. Alors, $C_g = \{x \in \mathbb{E} / x \leq x_0\}$ et $C_d = \{y \in \mathbb{E} / y \geq y_0\}$ formeraient une coupure de \mathbb{E} et il existerait deux nombres $z = x_0$ et $z = y_0$ tels que $(\forall x \in C_g)(\forall y \in C_d) x \leq z \leq y$. Contradiction. \square

Proposition 5.21 (\mathbb{R}_o, \leq) n'est pas continu.

Preuve : on sait déjà que \mathbb{R}_o ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure (cf. la **Remarque 2.1**). On peut aussi prendre $C_g = \mathbb{R}_o^- \cup [0[$ et $C_d = \mathbb{R}_o^+ \setminus [0[$. On vérifie les deux propriétés d'une coupure mais il n'existe pas $\epsilon \in \mathbb{R}_o$ tel que ϵ soit la borne supérieure de $[0[$. \square

Pour que la droite numérique non standard vérifie le Théorème de Bolzano, il suffit de considérer la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est un espace topologique totalement ordonné [30, Chap.IV, p.145 à 150, p.162] métrisable [31, p.51] .

On ajoute à l'ensemble \mathbb{R}_o tous les points isolés qui ferment les coupures infinitésimales.

Définition 5.22 On pose $\overline{\mathbb{R}_o} = \mathbb{R}_o \cup F$ avec

$$F = \{t + \sum_{1 \leq k \leq P} a_k \cdot o^k / t \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{N}^*, a_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k < P, a_P = \pm\infty\}.$$

Remarque 5.23 $\overline{\mathbb{R}_o}$ est totalement ordonné par l'ordre lexicographique, l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ et $\infty \cdot o \ll 1$, i.e. $(\forall n \in \mathbb{N}) +\infty \cdot o < \frac{1}{n}$. On note $\epsilon = +\infty \cdot o$ et $\epsilon \cdot o = +\infty \cdot o^2$ etc... les bornes supérieures des coupures successives en 0 et l'on peut rigoureusement écrire dans $\overline{\mathbb{R}_o}$ que $]t[= [t - \epsilon, t + \epsilon]$.

$\overline{\mathbb{R}_o}$ a perdu toutes ses propriétés algébriques puisque l'addition n'est plus interne.

La démonstration complète du théorème suivant est un peu longue mais cela prouve que l'ajout des éléments infinis de $\overline{\mathbb{R}}$ à \mathbb{R}_o lui comble toutes ses discontinuités.

Théorème 5.24 $(\overline{\mathbb{R}_o}, \leq)$ est continu.

Preuve : $\overline{\mathbb{R}_o}$ est dense dans lui-même.

Soit $X \subset \overline{\mathbb{R}_o}$ majoré. On démontre qu'il existe $b = \sum_{i \geq 0} b_i o^i$ borne supérieure dans la topologie d'ordre de $\overline{\mathbb{R}_o}$. On appelle Troncature d'ordre I de $x = \sum_{i \geq 0} a_i o^i$, le nombre

$$T_I(x) = \sum_{0 \leq i \leq I} a_i o^i \text{ pour } I \in \mathbb{N}. \text{ On démontre par récurrence la proposition } P(I) :$$

$T_I(\overline{\mathbb{R}_o})$ vérifie la propriété de Bolzano, i.e. si $X \subset \overline{\mathbb{R}_o}$ est majoré, alors $T_I(X)$ est borné supérieurement dans la topologie d'ordre de $T_I(\overline{\mathbb{R}_o})$.

1 $P(0) : T_0(\overline{\mathbb{R}_o}) = \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure. On démontre seulement $P(1)$, la généralisation est immédiate.

Soit $X \subset T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$ majoré, donc $T_0(X)$ est majoré aussi et il est borné par $b_0 = \text{Sup} T_0(X) \in \mathbb{R}$.

Soit $F : X \cap]b_0[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x = b_0 + a_1 \cdot o \mapsto a_1$.

$\text{Im} F \subset \overline{\mathbb{R}}$ donc il est borné supérieurement [30, p.34] par $b_1 \in \overline{\mathbb{R}}$. On démontre en même temps dans les trois cas ($b_1 = -\infty, +\infty$ et b_1 fini) que $\text{Sup} X = b_0 + b_1 \cdot o$ dans $T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$.

1.1 Soit $x \in X, x = a_0 + a_1 \cdot o, a_0 \leq b_0$ ou $a_0 = b_0$ et $a_1 \leq b_1$ donc $x \leq b_0 + b_1 \cdot o$. On montre que c'est le plus petit majorant de X .

1.2 Soit $M \in T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$ majorant de $X \subset T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$, $M = m_0 + m_1 \cdot o$.

1er cas $m_0 > b_0$ alors $M < b_0 + b_1 \cdot o$.

2ème cas $m_0 = b_0$. $M = b_0 + m_1 \cdot o$ est un majorant de $X \cap]b_0[$ donc $b_1 \leq m_1$ puisque b_1 est la borne supérieure de $\text{Im} F$. Dans les deux cas, $b_0 + b_1 \cdot o \leq M$.

2 Que se passe-t-il en plus lorsque $b_I = -\infty$ ou $b_I = +\infty$?

Dans la démonstration de $P(2)$, on montre que si X est majoré et $T_1(X)$ borné supérieurement par $b_0 + \epsilon$ ou $b_0 - \epsilon$, on a aussi $T_2(X)$ borné supérieurement par $b_0 + \epsilon$ ou $b_0 - \epsilon$.

2.a Si $(\forall x \in X) T_1(x) \leq b_0 + \epsilon$, alors $T_2(x) \leq b_0 + \epsilon$ aussi et $b_0 + \epsilon$ est majorant de $T_2(X)$ dans $T_2(\overline{\mathbb{R}_o})$. On montre que c'est le plus petit.

Imaginons que $(\exists m \in T_2(\overline{\mathbb{R}_o})) (\forall x \in X) T_2(x) \leq m < b_0 + \epsilon$. Alors, $T_1(x) \leq T_1(m)$ et $T_1(m) \geq b_0 + \epsilon$ puisque $b_0 + \epsilon = \text{Sup}T_1(X)$ dans $T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$. On a $T_0(m) > b_0$ ou $T_1(m) = b_0 + \epsilon$.

Dans les deux cas $m \geq b_0 + \epsilon$. Contradiction.

2.b Si $(\forall x \in X) T_1(x) \leq b_0 - \epsilon$, alors $T_0(x) < b_0$ ou $T_1(x) = b_0 - \epsilon$. Dans les deux cas, $T_2(x) \leq b_0 - \epsilon$. C'est majorant de $T_2(X)$ dans $T_2(\overline{\mathbb{R}_o})$, on montre que c'est le plus petit.

Imaginons que $(\exists m \in T_2(\overline{\mathbb{R}_o})) (\forall x \in X) T_2(x) \leq m < b_0 - \epsilon$. Donc $T_1(m)$ est un majorant de $T_1(X)$ dans $T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$ et $T_1(m) \geq b_0 - \epsilon$ puisque $b_0 - \epsilon = \text{Sup}T_1(X)$ dans $T_1(\overline{\mathbb{R}_o})$.

On en déduit que $m \geq b_0 - \epsilon$ car il n'existe aucun nombre de partie standard b_0 inférieur à $b_0 - \epsilon$. Contradiction.

2.c Dès que la borne supérieure de X est l'extrémité infinie d'une coupure infinitésimale, elle le reste pour tous les $T_I(X)$ suivants, dans la topologie de $T_I(\overline{\mathbb{R}_o})$. On montre que c'est encore le cas pour X dans la topologie de $\overline{\mathbb{R}_o}$.

On a $(\forall i \geq I) \text{Sup}T_i(X) = b = b_0 + b_1 \cdot o + \dots + b_{I-1} \cdot o^{I-1} + \infty \cdot o^I$ (resp. $-\infty \cdot o^I$) dans $T_i(\overline{\mathbb{R}_o})$ et $(\forall i < I) \text{Sup}T_i(X) = T_i(b)$ dans $T_i(\overline{\mathbb{R}_o})$. On montre que $\text{Sup}(X) = b$ dans la topologie de $\overline{\mathbb{R}_o}$.

2.c.1 Si $(\exists x \in X) x > b$, $T_{I-1}(X) > T_{I-1}(b)$ (resp. $T_I(x) > b$).

Ceci est contradictoire avec $\text{Sup}T_{I-1}(X) = T_{I-1}(b)$ dans $T_{I-1}(\overline{\mathbb{R}_o})$ (resp. $\text{Sup}T_I(X) = b$ dans $T_I(\overline{\mathbb{R}_o})$).

2.c.2 On montre que b est le plus petit majorant de X .

Si $m \in \overline{\mathbb{R}_o}$ est un majorant de X tel que $m < b$, alors $T_I(m) < b$ (resp. $T_{I-1}(m) < T_{I-1}(b)$) ce qui est contradictoire avec $\text{Sup}T_I(X) = b$ dans $T_I(\overline{\mathbb{R}_o})$ (resp. $\text{Sup}T_{I-1}(X) = T_{I-1}(b)$ dans $T_{I-1}(\overline{\mathbb{R}_o})$).

3 On considère maintenant le cas où tous les b_i sont finis et l'on montre que $b = \sum_{i \geq 0} b_i o^i = \text{Sup}(X)$ dans $\overline{\mathbb{R}_o}$.

X est majoré et $(\forall i \in \mathbb{N}) \text{Sup}T_i(X) = T_i(b)$ dans la topologie de $T_i(\overline{\mathbb{R}_o})$. Deux nouveaux raisonnements par l'absurde suffisent.

3.1 Si $x > b$, il existe i_0 tel que $T_{i_0}(x) > T_{i_0}(b)$ et $T_i(x) = T_i(b)$ pour $0 \leq i \leq i_0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse au rang i_0 . On montre que b est le plus petit majorant de X .

3.2 Si $m \in \overline{\mathbb{R}_o}$ est un majorant de X et $m < b$, on a aussi i_0 tel que $T_{i_0}(m) < T_{i_0}(b)$ et $T_i(m) = T_i(b)$ pour $0 \leq i \leq i_0$ or $T_{i_0}(m)$ est un majorant de $T_{i_0}(X)$ et donc, puisque $\text{Sup}T_{i_0}(X) = T_{i_0}(b)$ dans $T_{i_0}(\overline{\mathbb{R}_o})$ on a $T_{i_0}(b) \leq T_{i_0}(m)$. Contradiction. \square

Remarque 5.25 $\overline{\mathbb{R}_o}$ est un dictionnaire de numéros car il est totalement ordonné et, comme un dictionnaire de lettres, cela n'aurait aucun sens d'ajouter des mots.

Un dictionnaire fini n'est pas dense puisqu'il y a la notion de successeur. Un dictionnaire infini de tous les mots formés d'un nombre fini de lettres serait dense mais pas continu.

Si l'on considère tous les mots ayant un nombre fini ou infini dénombrable de lettres, le "dictionnaire" devient continu car l'alphabet est discret mais ce n'est pas le cas de \mathbb{R} (il n'y a pas de successeur dans \mathbb{R}).

Proposition 5.26 (Ω, \leq) n'est pas continu.

Preuve : elle est la même que pour la **Proposition 5.18**. \square

Définition 5.27 On pose $\overline{\Omega} = \Omega \cup \mathbb{F}$ avec

$$\mathbb{F} = \left\{ \sum_{1 \leq k \leq N} b_k \Sigma^k + t + \sum_{1 \leq p \leq P} a_p \cdot o^p / N \in \mathbb{N}^*, b_k, t \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. P \in \mathbb{N}^*, a_P = \pm\infty, a_p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < P \right\}.$$

Théorème 5.28 $(\overline{\Omega}, \leq)$ est continu.

Preuve : $\overline{\Omega}$ est dense dans lui-même, on montre qu'il vérifie le Théorème de Bolzano. Soit $X \subset \overline{\Omega}$ non vide et minoré. L'ensemble de ses parties entières est noté $[X]$ et $[X] \subset \mathbb{N}$ est non vide et minoré par M .

Il existe $L_0 \in \mathbb{N}$ tel que L_0 soit un minorant de $[X]$ et $L_0 + 1$ ne le soit plus car si ce n'était pas le cas on aurait, pour tous les $L \in \mathbb{N}$, si L est un minorant de $[X]$ alors $L + 1$ l'est aussi. Puisque M est un minorant de $[X]$, on prouverait par induction transfinie dans \mathbb{N} que tous les entiers $L \geq M$ sont des minorants de $[X]$ et $[X]$ serait alors vide. Contradiction.

On peut affirmer alors que $L_0 - 1$ est un minorant de $X \subset \overline{\Omega}$ et que $L_0 + 1$ ne l'est plus. On utilise la translation $T : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$, $x \mapsto x - L_0$ pour prouver que -1 est un minorant de $T(X)$ mais pas 1. On démontre comme pour le **Théorème 5.24** que $T(X)$ a une borne inférieure $b \in [-1, 1]$ et X a une borne inférieure unique $L_0 + b$. \square

5.5 Une nouvelle caractérisation des structures $(\Omega, +, \times, \leq)$ et $(\overline{\Omega}, \leq)$

$\mathbb{R}(\Sigma) = \mathbb{R}(o)$ est le corps des fractions de l'anneau des polynômes de degré fini $\mathbb{R}[\Sigma]$ ou $\mathbb{R}[o]$. C'est le plus petit sur-corps de \mathbb{R} contenant Σ et son inverse o (cf. la **Remarque 1.5**).

On le munit de l'ordre lexicographique tel que

$$0 < o \ll 1 \ll \Sigma.$$

Remarque 5.29 Cette structure algébrique et ordinale n'est pas continue car la coupure formée de

$$C_g = \left\{ \frac{P(o)}{Q(o)} \in \mathbb{R}(o)^+ / \left(\frac{P(o)}{Q(o)} \right)^2 \leq 1 + o \right\} \cup \mathbb{R}(o)^-$$

et

$$C_d = \left\{ \frac{P(o)}{Q(o)} \in \mathbb{R}(o)^+ / \left(\frac{P(o)}{Q(o)} \right)^2 \geq 1 + o \right\}$$

définit une série formelle $(1+o)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{o}{2} - \frac{o^2}{8} + \frac{o^3}{16} - 5\frac{o^4}{128} \dots$ qui n'est pas une fraction rationnelle. Elle n'est pas non plus complète car les troncatures successives de cette "racine" de $1+o$ forment une suite de Cauchy qui n'est pas convergente dans $\mathbb{R}(o)$.

Ω (resp. $\overline{\Omega}$) étant un corps (resp. ensemble) totalement ordonné, on va démontrer que Ω est le complété de $\mathbb{R}(\Sigma) = \mathbb{R}(o)$ et que $\mathbb{R}(\Sigma) = \mathbb{R}(o)$ est continu dans $\overline{\Omega}$. On pourra alors dire :

Résultats principaux

$(\Omega, +, \times, \leq)$ est le *plus petit* sur-corps strict de \mathbb{R} totalement ordonné et complet.

$(\overline{\Omega}, \leq)$ est le plus petit sur-ensemble strict de \mathbb{R} totalement ordonné et continu.

Lemme 5.30 *En tant qu'algèbres, $\mathbb{R}(o) \subset \Omega$.*

Preuve : toute fraction rationnelle $\frac{P(o)}{Q(o)}$ est développable en une série formelle $S(o) \in \mathbb{R}_o = \mathbb{R}[[o]]$ ssi $Q(o)$ n'est pas infinitésimal ($\frac{P}{Q}$ n'admet pas 0 pour pôle [8, p.240]).

Si ce n'est pas le cas, $Q(o) = o^k Q_1(o)$ avec $\frac{P(o)}{Q_1(o)} = S_1(o)$. Alors, $\frac{P(o)}{Q(o)} = \Sigma^k \times S_1(o) \in \Omega$. \square

Définition 5.31 *On note "série formelle", un élément quelconque de Ω .*

Théorème 5.32 *Ω est l'ensemble des limites des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}(o)$ muni de son ordre lexicographique. Autrement dit, Ω est le complété de $\mathbb{R}(o)$.*

Preuve : elle est immédiate. Soit une suite de Cauchy $(\frac{P_n(o)}{Q_n(o)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}(o) \subset \Omega$. On sait que Ω est complet (cf. la **Proposition 5.12**), donc la suite converge vers un élément unique de Ω . Réciproquement, soit $S(o)$ une "série formelle" de o qui n'est pas le quotient exact de deux polynômes de o par la division selon les puissances croissantes. Les troncatures successives de cette "série" forment une suite de Cauchy de $\mathbb{R}(o)$ qui converge évidemment vers cet élément de Ω . \square

Lemme 5.33 *$\mathbb{R}(o)$ est dense dans Ω et Ω est dense dans $\overline{\Omega}$.*

Preuve : soient $S(o)$ et $T(o)$ deux "séries formelles" telles que $S(o) \leq T(o)$. Il existe au moins une fraction rationnelle strictement comprise entre $S(o)$ et $T(o)$, c'est la somme finie

$F(o) = T_N(\frac{S_d(o)+S_g(o)}{2})$ avec $N = \text{ord}(S_d(o) - S_g(o))$ qui est un nombre fini puisque $S_d(o) \neq S_g(o)$.

On démontre que \mathbb{R}_o est dense dans $\overline{\mathbb{R}_o}$.

Soient $x = t + \sum_{k \geq 1} a_k o^k$ (si $a_N = \pm\infty$ alors $a_k = 0$ pour $k > N$)
et $x' = t' + \sum_{k \geq 1} b_k o^k$ (si $b_P = \pm\infty$ alors $b_k = 0$ pour $k > P$).

On suppose que $x < x'$. Si $x, x' \in \mathbb{R}_o$, $x < \frac{x+x'}{2} < x'$. Il est facile dans tous les autres cas ($N \neq P$, $N = P$ et x et y dans une même coupure ou non) de trouver un polynôme de o strictement compris entre x et x' .

On se ramène à ce cas (comme dans la démonstration du **Théorème 5.28**) pour démontrer que Ω est dense dans $\overline{\Omega}$.
 \square

Remarque 5.34 On sait que $\mathbb{R}(o)$ est discontinu (cf. la **Remarque 5.29**). $\mathbb{R}(o)$ n'est pas continu dans Ω car la même coupure que précédemment, avec o au lieu de $1+o$:

$$C_g = \{ \frac{P(o)}{Q(o)} \in \mathbb{R}(o)^+ / (\frac{P(o)}{Q(o)})^2 \leq o \} \cup \mathbb{R}(o)^-$$

et

$$C_d = \{ \frac{P(o)}{Q(o)} \in \mathbb{R}(o)^+ / (\frac{P(o)}{Q(o)})^2 \geq o \}$$

donne

$$C_g = \mathbb{R}(o)^- \cup ([0[\cap \mathbb{R}(o)) \text{ et } C_d = \mathbb{R}(o)^+ \setminus ([0[\cap \mathbb{R}(o))$$

et $+\infty \cdot o = \epsilon$ n'appartient pas à Ω mais à $\overline{\Omega}$.

Théorème 5.35 On peut assimiler $\overline{\Omega}$ à l'ensemble des coupures de $\mathbb{R}(o)$. Autrement dit, $\mathbb{R}(o)$ est continu dans $\overline{\Omega}$.

Preuve : soit (C_g, C_d) une coupure quelconque de $\mathbb{R}(o)$. Soient

$$C'_d = \{ S_d(o) \in \overline{\Omega} / (\forall F_g(o) \in C_g) F_g(o) \leq S_d(o) \},$$

$$C'_g = \{ S_g(o) \in \overline{\Omega} / (\forall F_d(o) \in C_d) S_g(o) \leq F_d(o) \}.$$

On démontre que (C'_g, C'_d) est une coupure de $\overline{\Omega}$.

On a $C_g \subset C'_g$ et $C_d \subset C'_d$. Soit $S(o) \in \overline{\Omega}$.

Deux cas sont à considérer :

$(\exists F_d(o) \in C_d) F_d(o) < S(o)$ alors $S(o) \in C'_d$ et

$(\forall F_d(o) \in C_d) S(o) \leq F_d(o)$ et $S(o) \in C'_g$.

$\overline{\Omega} \subset C'_g \cup C'_d$ et puisque $C'_g \cup C'_d \subset \overline{\Omega}$, on a la première condition.

Soient $S_d(o)$ un élément quelconque de C'_d et $S_g(o)$ un élément quelconque de C'_g . Il faut montrer que $S_g(o) \leq S_d(o)$.

Si ce n'était pas le cas, on aurait $S_d(o) < S_g(o)$ puisque $\overline{\Omega}$ est totalement ordonné. Il existerait alors par le Lemme

précèdent une fraction rationnelle $F(o)$ qui serait strictement comprise entre $S_d(o)$ et $S_g(o)$.

Il y a une contradiction, soit parce que $F(o) \in C_g$ et $S_d(o) < F(o)$, soit parce que $F(o) \in C_d$ et $F(o) < S_g(o)$.

Puisque $\overline{\Omega}$ est continu :

$$(\exists! S(o) \in \Omega)(\forall S_g(o) \in C'_g)(\forall S_d(o) \in C'_d) S_g(o) \leq S(o) \leq S_d(o).$$

En particulier :

$$(\forall F_g(o) \in C_g \subset C'_g)(\forall F_d(o) \in C_d \subset C'_d) F_g(o) \leq S(o) \leq F_d(o).$$

$S(o)$ est unique à partager la coupure (C_g, C_d) car s'il existait $T(o)$ ayant la même propriété, le même Lemme prouverait qu'il existe une fraction rationnelle entre $S(o)$ et $T(o)$. \square

$\mathbb{R}(o)$ est donc continu dans $\overline{\Omega}$. Comme $\mathbb{R}(o)$ est le plus petit sur-corps de \mathbb{R} contenant l'élément nouveau o , on peut "dire" que $\overline{\Omega}$ est le plus petit sur-ensemble de \mathbb{R} qui soit continu et totalement ordonné.

Conclusion

Outre une démonstration entièrement nouvelle du Théorème Fondamental de l'Analyse, les résultats principaux de cette recherche portent sur les ensembles de nombres :

1. Le modèle non standard de l'Arithmétique de Peano $(\mathbb{N}^+, +, \times, \leq, S)$ est "le" prolongement *intrinsèque* de l'ensemble standard \mathbb{N} car il ne dépend d'aucun paramètre choisi arbitrairement.

2. $(\mathbb{R}_o, +, \times, \leq)$ est "le" plus petit sur-anneau intègre de \mathbb{R} totalement ordonné, intrinsèque et *complet* mais il n'est pas continu.

$(\overline{\mathbb{R}_o}, \leq)$ est le plus petit sur-ensemble de \mathbb{R} intrinsèque et *continu*.

3. $(\Omega, +, \times, \leq)$ est le plus petit sur-corps de \mathbb{R} totalement ordonné, intrinsèque et *complet* mais il n'est pas continu.

$(\overline{\Omega}, \leq)$ est le prolongement par continuité du plus petit sur-corps $\mathbb{R}(o)$ de \mathbb{R} , totalement ordonné par l'ordre

lexicographique. Il est intrinsèque, i.e. ses propriétés sont toutes "nécessaires"

Autrement dit, les ensembles \mathbb{R}_o , $\overline{\mathbb{R}_o}$, Ω , $\overline{\Omega}$ et \aleph^+ sont les plus "simples" extensions *intrinsèques* des ensembles \mathbb{R} d'une part, \mathbb{N} d'autre part.

Dans un article prochainement déposé dans Archiv D.S. [5] on donne les propriétés très voisines des ensembles $\mathbb{R}_3 = \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^3)}$ et \aleph_3 mais ce sont des prolongements *non intrinsèques* de \mathbb{R} et \mathbb{N} puisqu'ils dépendent du choix d'un paramètre $I = 3$.

Ces ensembles de nombres non standard permettent une étude entièrement originale du problème de la gravitation à deux corps.

Remerciements

Le 7 Janvier 2011, j'ai fait un séminaire au Laboratoire M.A.M. de l'U.B.S. (Vannes) où j'ai présenté une première version des deux premières parties de cet article, mais pour l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}[X]/(X^3)$. Dans une troisième partie, je présentais seulement "deux jolis résultats à vérifier soigneusement" sur les ensembles \aleph et Ω tels qu'ils ont été ici définis.

Je remercie Frédéric Mathéus de s'y être intéressé et de m'avoir encouragé à publier ces "jolis résultats" sous ArXiv.

Tous mes remerciements également à Qiyu Jin (M.A.M.) de m'avoir aidé à maîtriser le Langage LaTeX.

Références

- [1] A.Pétry, 2002, Ballade en A.N.S. sur les traces de A.Robinson, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, Sup 961. En ligne : <http://www.emis.de/journals/BBMS/Bulletin/sup961/petry.pdf>
- [2] J.Baire et V.Henry, 2008, Analyse infinitésimale, le Calculus redécouvert, Academia Bruylant, Louvain-la-Neuve.
- [3] A.Robert, 1985, Analyse non standard, Presses polytechniques romandes.

- [4] D.E.Knuth, 1974, Les nombres surréels, ou comment deux anciens étudiants découvrirent les mathématiques pures et vécurent heureux - Une romance mathématique de D.E.Knuth, 1977, Addison Wesley Publishing Company, 1997, Traduction de D.E. Loeb et H. Loeb. En ligne : <http://tex.loria.fr/historique/loeb-nombres-surreels.pdf>
- [5] Th.Bautier, 2012, A very simple set of non standard real numbers, to completely understand the mechanism of gravitational "traction", bientôt disponible sur ArXiv.
- [6] I.Newton, 1671, La méthode des fluxions et des suites infinies, 1740, Traduction de Buffon, 1994, rééd. Albert Blanchard.
- [7] R.Godement, 1998, Analyse mathématique, Volume I, Springer, Berlin.
- [8] E.Ramis, C.Deschamps, J.Odoux, 1988, Cours de Mathématiques spéciales, 1, Algèbre, Masson, Paris.
- [9] J.Dieudonné, 1965, Fondement de l'Analyse moderne, Cahiers scientifiques, Fascicule XXVIII, Paris, Gauthier-Villard éditeur.
- [10] N.Bourbaki, 1960, Eléments d'Histoire des Mathématiques, Hermann, Paris.
- [11] N.Bourbaki, 1976, Fonctions d'une variable réelle, Diffusion C.C.L.S.
- [12] G.Cantor et R.Dedekind, 1872-1899, Correspondance Cantor-Dedekind, in J.Cavaillès, 1947, Philosophie mathématique, rééd. 1962, Hermann, Paris.
- [13] J.Cavaillès, 1938, Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, in J.Cavaillès, 1947, Philosophie mathématique, rééd. 1962, Hermann, Paris.
- [14] N.Bourbaki, 1970, Théorie des ensembles, Hermann.
- [15] R.Dedekind, 1888, Que sont et à quoi servent les nombres ? in 1963, Essays on the theory of numbers, Dover Publications, New York, 2006, Traités sur la théorie des nombres, éditions du Tricorne.
- [16] J.Cavaillès, 1940, Transfini et continu, in J.Cavaillès, 1947, Philosophie mathématique, rééd. 1962, Hermann, Paris.
- [17] B.Russell, 1919, Introduction to mathematical philosophy, ed. Allen et Unwin, London, 1991, Introduction à la

philosophie mathématique, Bibliothèque philosophique Payot.

- [18] R.Ball, 1907, Histoire des mathématiques, volume II, rééd. Jacques Gabay, 2003.
- [19] M.Blay, 2002, La science du mouvement de Galilée à Lagrange, Belin Sup.
- [20] M.Panza, 2005, Newton et les origines de l'Analyse : 1664-1666, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.
- [21] M.Panza, 2003, Newton, Figues du savoir, Les belles Lettres.
- [22] I.Newton, 1726, Principes mathématiques de la philosophie naturelle, 2005, Dunod.
- [23] Th.Bautier, 1993 "Médiations dans l'enseignement des transformations géométriques", 1993, Thèse P.H.D. Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I.
- [24] G.Darboux, Etude sur le développement des méthodes géométriques, in R.Ball, 1907, Histoire des mathématiques, volume II, rééd. Jacques Gabay, 2003.
- [25] Jean-Luc Verley, 1978, Les fonctions analytiques in J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900, Hermann, Paris.
- [26] J.Petitot, Les infinitésimales comme éléments nilpotents, actualité du débat Nieuwentijt / Leibniz, n°138, mai 1997, les cahiers du Centre d'Analyse et de Mathématique sociale, EHESS, éd. CNRS.
- [27] N.Bourbaki, 1974, Topologie générale, Chapitre 5 à 10, Diffusion C.C.L.S.
- [28] N.Bourbaki, 1981, Espaces vectoriels topologiques, Masson.
- [29] N.Bourbaki, 1965, Topologie générale, Chapitres 1 et 2, Hermann.
- [30] N.Bourbaki, 1960, Topologie générale, Chapitres 3 et 4, Hermann.
- [31] C.Deschamps, J.Odoux, 1976, Cours de Mathématiques, 3. Topologie et éléments d'analyse, rééd. 1998, Dunod, Paris.
- [32] R.Dedekind, 1872, Continuité et nombres irrationnels, in 1963, Essays on the theory of numbers, Dover Publications, New York, 2006, Traités sur la théorie des nombres, éditions du Tricorne.

This figure "Image_1.jpg" is available in "jpg" format from:

<http://arxiv.org/ps/1207.0696v1>

This figure "Image_2.jpg" is available in "jpg" format from:

<http://arxiv.org/ps/1207.0696v1>

This figure "Image_3.jpg" is available in "jpg" format from:

<http://arxiv.org/ps/1207.0696v1>